

TRẦN ĐỨC HUYỀN

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

HÌNH GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

LUYỆN THI ĐẠI HỌC

(Tái bản lần thứ ba)



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Th.s TRẦN ĐỨC HUYỀN
GV Trường PTTH chuyên Lê Hồng Phong

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
HÌNH GIẢI TÍCH
TRONG KHÔNG GIAN

LUYỆN THI ĐẠI HỌC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Hình học giải tích trong không gian là một phân môn toán học tuy mới mẻ nhưng rất thú vị và hấp dẫn bởi tính khoa học của nó. Tất cả các quan hệ như song song, vuông góc, khoảng cách, đều được diễn đạt thành các công thức rõ ràng. Hình giải tích trong không gian đóng một vai trò rất quan trọng trong chương trình toán lớp 12, Cải cách Giáo dục và đặc biệt là trong việc ôn thi vào các trường đại học.

Nhằm giúp học sinh lớp 12 tự rèn luyện để nắm vững kiến thức và chuẩn bị thi vào các trường đại học, chúng tôi biên soạn và giới thiệu đến các bạn cuốn : **"Phương pháp giải toán Hình giải tích trong không gian."**

Một đề toán tổng hợp thực chất chỉ là một tổ hợp của một số các dạng toán cơ bản. Nắm vững các dạng toán cơ bản một cách có hệ thống để có phương pháp giải đúng sẽ giúp thí sinh giải được rất nhiều đề thi, đặc biệt là các đề thi của bộ đề tuyển sinh Đại học của Bộ giáo dục và Đào tạo, một cách thông minh và chắc chắn.

Sách gồm 7 chương. Mỗi chương có ba phần :

A : Tóm tắt lý thuyết.

B : Phương pháp giải toán.

C : Các đề toán có kèm theo lời giải và hướng dẫn chi tiết.

Để việc sử dụng sách được tốt, đề nghị các em học sinh làm theo những hướng dẫn sau :

- Học thuộc các phần tóm tắt lý thuyết.
- Xem kỹ các phương pháp giải toán mà sách đề nghị, nắm vững các bước chính của phương pháp.
- Tự giải các bài tập, nếu không giải được mới xem phần hướng dẫn.

Mong rằng quyển sách này sẽ thực sự có ích cho các em học sinh.

TRẦN ĐỨC HUYỀN

Chương 1

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vectơ là một đoạn thẳng có định hướng :

Ví dụ : Vectơ $\overrightarrow{AB}$

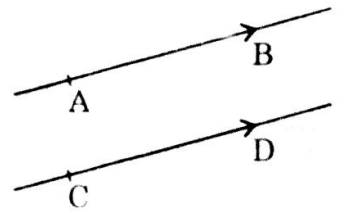


h.1.1

2. Hai vectơ bằng nhau :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{CD} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \end{cases}$$

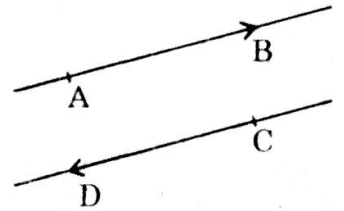


h.1.2

3. Hai vectơ đối nhau :

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{CD} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \end{cases}$$



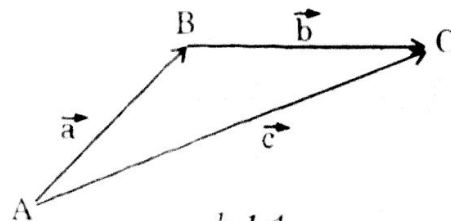
h.1.3

4. Các phép toán :

* Cộng vectơ :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

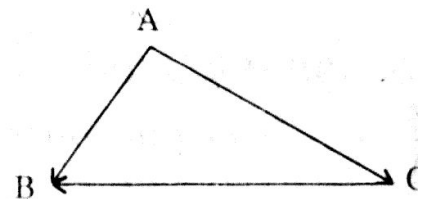


h.1.4

* Trừ vectơ :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$



h.1.5

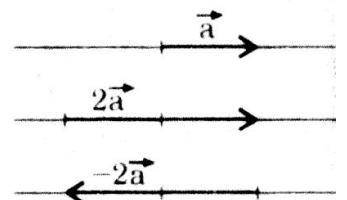
* Nhân một số với một vectơ :

$$\vec{b} = k \vec{a} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{b} \uparrow \uparrow \vec{a} & (k \geq 0) \\ |\vec{b}| = k |\vec{a}| \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{b} \uparrow \downarrow \vec{a} & (k < 0) \\ |\vec{b}| = |k| |\vec{a}| \end{cases}$$

$$|\vec{b}| = |k| |\vec{a}|$$



h.1.6a

* Tích vô hướng của hai vector :

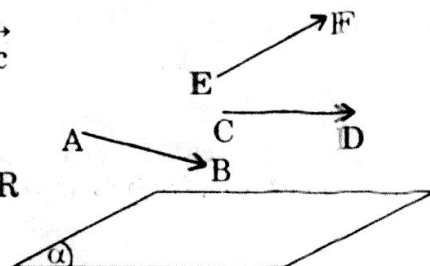
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

5. Ba vector đồng phẳng :

- $\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{EF}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists$ mặt phẳng (α) sao cho $AB \parallel \alpha$; $CD \parallel \alpha$; $EF \parallel \alpha$
- Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trong đó $\vec{b}$ và $\vec{c}$ khác phương.

Ta có : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{R}$ sao cho :

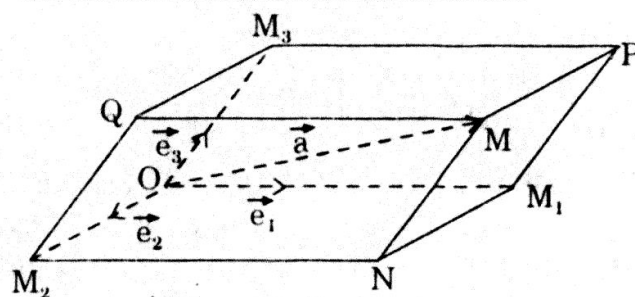
$$\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$$



h.1.6

6. Phân tích vector $\vec{a}$ một cách duy nhất theo 3 vector không đồng phẳng $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$



h.1.7

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Các hệ thức thường dùng trong đại số vector :

$$\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}$$

$$\vec{AB} = \vec{MB} - \vec{MA}$$

$$\vec{AB} = -\vec{BA}$$

$$\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI} \quad (I \text{ là trung điểm của } AB)$$

$$\vec{AB}^2 = |\vec{AB}|^2 = AB^2$$

$$2. \vec{a} \text{ cùng phương với } \vec{b} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ sao cho } \vec{a} = k\vec{b}$$

$$3. \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$4. A \equiv B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$5. G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

6. Để chứng minh ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng ta thường dùng phản chứng:

Giả sử $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng, thế thì có $m, n \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c} \quad (1)$$

Nếu (1) dẫn đến mâu thuẫn thì kết luận $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

C. BÀI TẬP

Bài 1 Trong không gian cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng:

$$1. \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$

$$2. \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$$

Giải

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có: } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}) \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \vec{0} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Ta có: } \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}.$$

Bài 2 Cho tứ diện SABC và G là trọng tâm của tam giác ABC.

Hãy phân tích vectơ $\vec{SG}$ theo 3 vectơ $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}$.

Giải

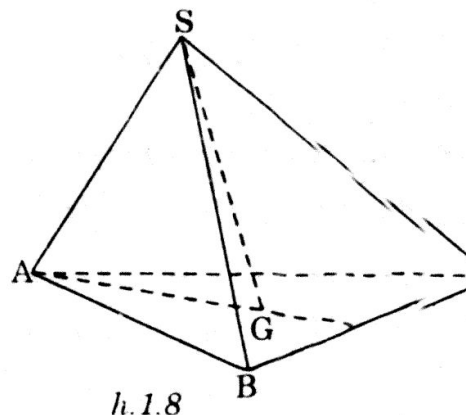
Ta có : G là trọng tâm của tam giác ABC

$$\Rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{SA} - \vec{SG} + \vec{SB} - \vec{SG} + \vec{SC} - \vec{SG} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 3\vec{SG} = \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC}$$

$$\text{Vậy : } \vec{SG} = \frac{1}{3}\vec{SA} + \frac{1}{3}\vec{SB} + \frac{1}{3}\vec{SC}.$$



Bài 3 Cho hình tứ diện ABCD. Tìm điểm O sao cho :

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$$

Chứng minh rằng điểm O đó là duy nhất.

Giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD, I là trung điểm của MN.

$$\text{Ta có : } \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$$

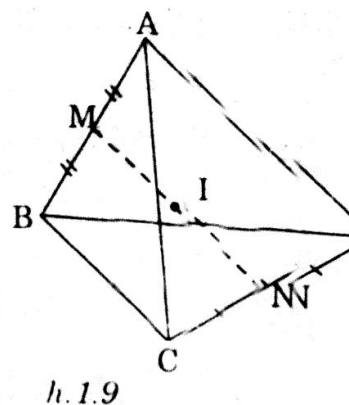
$$\Leftrightarrow 2\vec{OM} + 2\vec{ON} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2(\vec{OM} + \vec{ON}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\vec{OI} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OI} = \vec{0} \Leftrightarrow O = I$$

Vậy điểm O cần tìm chính là điểm I.

Hiển nhiên điểm O đó là duy nhất.



Bài 4 Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và C và I là trung điểm của EF.

a) Chứng minh rằng : $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$.

b) Với điểm M bất kì trong không gian, hãy chứng minh rằng:

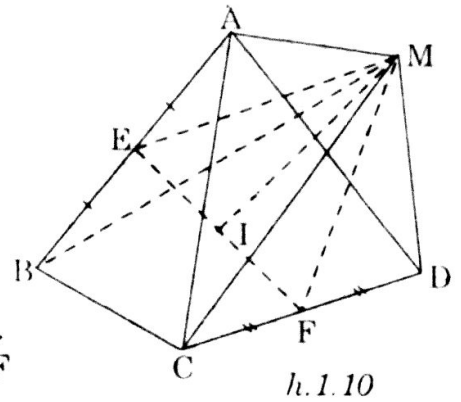
$$4\vec{MI} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}.$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} &= 2\vec{IE} + 2\vec{IF} \\ &= 2(\vec{IE} + \vec{IF}) = 2(\vec{IE} - \vec{IE}) = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} &= 2\vec{ME} + 2\vec{MF} \\ &= 2(\vec{ME} + \vec{MF}) = 4\vec{MI}. \end{aligned}$$



Bài 5 Cho hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương và có độ dài bằng 1. Chứng minh rằng với mọi vectơ $\vec{w}$ có độ dài bằng 1 và đồng phẳng với $\vec{u}, \vec{v}$ thì vectơ $\vec{a} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$ có độ dài không đổi.

Giải

$$\text{Đặt } \alpha = \widehat{(\vec{u}, \vec{w})}$$

$$\beta = \widehat{(\vec{w}, \vec{v})}$$

$$\gamma = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$$

$$\text{Ta có: } \gamma = \alpha + \beta = \text{const}$$

$$\text{Do } |\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1, \text{ nên ta có:}$$

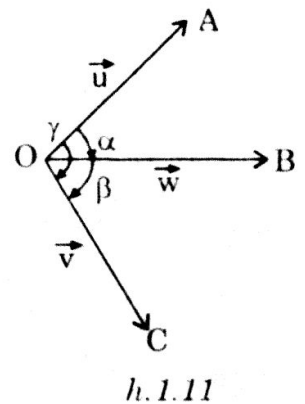
$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \cos\alpha; \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = \cos\beta; \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \cos\gamma$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \cos\alpha \cdot \vec{v} - \cos\beta \cdot \vec{u}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\vec{a})^2 &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta) \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta \\ &= \cos^2\alpha(1 - \cos^2\beta) + \cos^2\beta(1 - \cos^2\alpha) + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta \\ &= \cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta\sin^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta \\ &= (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)^2 \\ &= \sin^2(\alpha + \beta) = \sin^2\gamma \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = |\sin\gamma| = \text{const}$$

Vậy vectơ $\vec{a}$ có độ dài không đổi.



Bài 6

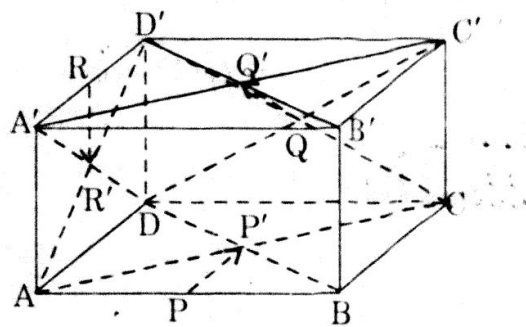
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi P, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB và $A'D'$, gọi P', Q, Q', R' lần lượt là giao điểm các đường chéo của các mặt $ABCD, CDD'C', A'B'C'D', ADD'A'$.

1. Chứng minh rằng $\vec{PP'} + \vec{QQ'} + \vec{RR'} = \vec{0}$

2. Chứng minh rằng hai tam giác $PQR, P'Q'R'$ có trọng tâm trùng nhau.

Giải

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Ta có: } & \vec{PP'} + \vec{QQ'} + \vec{RR'} \\
 &= \frac{1}{2} \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{DA'} + \frac{1}{2} \vec{A'A} \\
 &= \frac{1}{2} (\vec{AD} + \vec{DA'} + \vec{A'A}) \\
 &= \frac{1}{2} (\vec{AD} + \vec{DA}) = \vec{0}
 \end{aligned}$$



h.1.12

2. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác PQR và $P'Q'R'$. Ta có :

$$\vec{GP} + \vec{GQ} + \vec{GR} = \vec{0}$$

$$\vec{G'P'} + \vec{G'Q'} + \vec{G'R'} = \vec{0}$$

Theo câu 1 ta có :

$$\vec{PP'} + \vec{QQ'} + \vec{RR'} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{PG} + \vec{GG'} + \vec{G'P'} + \vec{QG} + \vec{GG'} + \vec{G'Q'} + \vec{RG} + \vec{GG'} + \vec{G'R'} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -(\vec{GP} + \vec{GQ} + \vec{GR}) + 3\vec{GG'} + (\vec{G'P'} + \vec{G'Q'} + \vec{G'R'}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 3\vec{GG'} = \vec{0} \Rightarrow G \equiv G'.$$

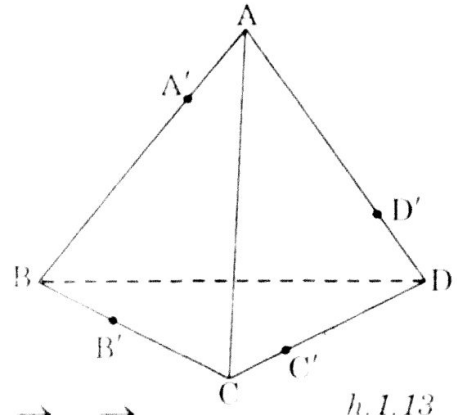
Vậy hai tam giác PQR và $P'Q'R'$ có trọng tâm trùng nhau.

Bài 7

Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ diện $ABCD$, người ta lấy theo thứ tự các điểm A', B', C', D' . Biết rằng trong không gian tồn tại một điểm O sao cho : $\vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} + \vec{OD'} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$

Hãy chứng minh : $\frac{\vec{AA'}}{\vec{A'B}} = \frac{\vec{BB'}}{\vec{B'C}} = \frac{\vec{CC'}}{\vec{C'D}} = \frac{\vec{DD'}}{\vec{D'A}}$

Giải



Ta đặt :

$$\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{AB}} = a; \quad \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{BC}} = b;$$

$$\frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{CD}} = c; \quad \frac{\overrightarrow{DD'}}{\overrightarrow{DA}} = d.$$

Ta có :

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OD}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BC} + c\overrightarrow{CD} + d\overrightarrow{DA} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BC} + c\overrightarrow{CD} - d(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (a - d)\overrightarrow{AB} + (b - d)\overrightarrow{BC} + (c - d)\overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{BC} + \gamma\overrightarrow{CD} = \vec{0} \quad (\text{với } a - d = \alpha, b - d = \beta, c - d = \gamma)$$

Giả sử $\alpha \neq 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{BC} - \frac{\gamma}{\alpha}\overrightarrow{CD}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{BC} + n\overrightarrow{CD}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD} \text{ đồng phẳng}$$

$$\Rightarrow A, B, C, D \text{ đồng phẳng (vô lí vì ABCD là tứ diện)}$$

Vậy : $\alpha = 0$.

Tương tự : $\beta = 0$ và $\gamma = 0$

Suy ra : $a = b = c = d$

Suy ra :

$$\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overrightarrow{DD'}}{\overrightarrow{DA}}$$

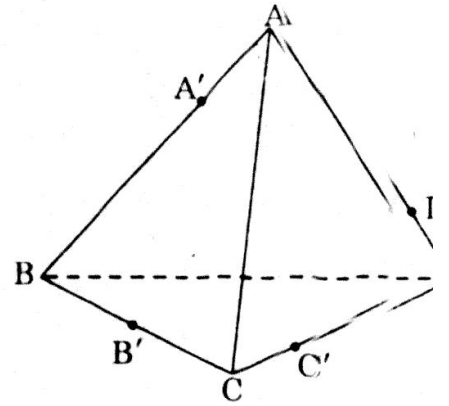
Vậy :

$$\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'B}} = \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{B'C}} = \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{C'D}} = \frac{\overrightarrow{DD'}}{\overrightarrow{D'A}}$$

Bài 8

Cho hình tứ diện ABCD. Gọi A', B', C', D' là các điểm lần lượt chia các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA theo tỉ số k, nghĩa là :

$$\frac{\vec{A'A}}{\vec{A'B}} = \frac{\vec{B'B}}{\vec{B'C}} = \frac{\vec{C'C}}{\vec{C'D}} = \frac{\vec{D'D}}{\vec{D'A}} = k$$



h.1.14

1. Chứng minh rằng với điểm O bất kì trong không gian, ta luôn luôn có :

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} + \vec{OD'}$$

2. Với giá trị nào của k thì bốn điểm A', B', C', D' đồng phẳng?

Giải

1. Ta có :

$$\frac{\vec{A'A}}{\vec{A'B}} = \frac{\vec{B'B}}{\vec{B'C}} = \frac{\vec{C'C}}{\vec{C'D}} = \frac{\vec{D'D}}{\vec{D'A}} = k$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{AA'}}{\vec{AB}} = \frac{\vec{BB'}}{\vec{BC}} = \frac{\vec{CC'}}{\vec{CD}} = \frac{\vec{DD'}}{\vec{DA}} = m \quad (\text{với } m = 1 - k)$$

$$\Rightarrow \vec{AA'} = m \vec{AB}, \vec{BB'} = m \vec{BC}, \vec{CC'} = m \vec{CD}, \vec{DD'} = m \vec{DA}$$

Ta lại có :

$$\begin{aligned} \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} + \vec{OD'} &= \vec{OA} + \vec{AA'} + \vec{OB} + \vec{BB'} + \vec{OC} + \vec{CC'} + \vec{OD} + \vec{DD'} \\ &= (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) + m(\underbrace{\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}}_{\vec{0}}) \\ &= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} \end{aligned}$$

Vậy : $\vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} + \vec{OD'} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$.

2. * Giả sử A', B', C', D', đều nằm trên mặt phẳng (P).

Ta xét đường thẳng Δ nào đó cắt (P) tại O.

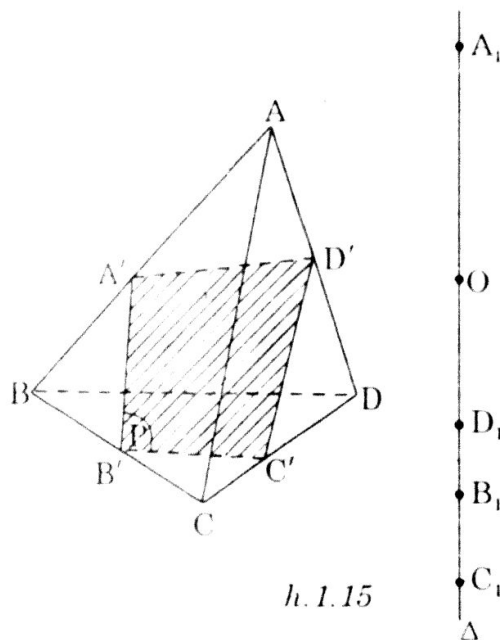
Lần lượt dựng 4 mặt phẳng $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ qua A, B, C, D và song song với (P). Chúng cắt Δ lần lượt tại A₁, B₁, C₁, D₁. Theo định lí Talet trong không gian ta có :

$$\frac{\vec{A'A}}{\vec{A'B}} = \frac{\vec{OA_1}}{\vec{OB_1}} = k$$

$$\frac{\vec{B'B}}{\vec{B'C}} = \frac{\vec{OB_1}}{\vec{OC_1}} = k$$

$$\frac{\vec{C'C}}{\vec{C'D}} = \frac{\vec{OC_1}}{\vec{OD_1}} = k$$

$$\frac{\vec{D'D}}{\vec{D'A}} = \frac{\vec{OD_1}}{\vec{OA_1}} = k$$



h. 1.15

$$\Rightarrow k^4 = \frac{\vec{OA_1}}{\vec{OB_1}} \cdot \frac{\vec{OB_1}}{\vec{OC_1}} \cdot \frac{\vec{OC_1}}{\vec{OD_1}} \cdot \frac{\vec{OD_1}}{\vec{OA_1}} \Rightarrow k^4 = 1 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 & (\text{loại}) \\ k = -1 \end{cases}$$

* Đảo lại nếu $k = -1$, ta có : $\vec{A'B'} = \vec{D'C'} = \frac{1}{2} \vec{AC}$

Suy ra : A', B', C', D' đồng phẳng.

Vậy : A', B', C', D' đồng phẳng $\Leftrightarrow k = -1$.

Bài 9 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt : $\vec{B'A'} = \vec{a}$, $\vec{B'B} = \vec{b}$, $\vec{B'C'} = \vec{c}$.

Gọi M là điểm chia đoạn thẳng AC' theo tỉ số m, N là điểm chia đoạn

thẳng CD' theo tỉ số n, tức là : $\frac{\vec{MA}}{\vec{MC'}} = m$; $\frac{\vec{NC}}{\vec{ND'}} = n$.

1. Hãy biểu thị các vectơ $\vec{B'M}$, $\vec{B'N}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

2. Xác định m, n để đường thẳng MN song song với đường thẳng $B'D$.

3. Tính độ dài đoạn thẳng MN theo độ dài a, b, c là 3 cạnh của hình hộp trong trường hợp MN song song với $B'D$ và $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật.

Giải

1. Ta có : $\frac{\vec{MA}}{\vec{MC'}} = m \Rightarrow \vec{MA} = m \vec{MC'}$

$$\Rightarrow \vec{B'A} - \vec{B'M} = m(\vec{B'C'} - \vec{B'M})$$

$$\Rightarrow (m-1)\vec{B'M} = m\vec{B'C'} - \vec{B'A}$$

$$\Rightarrow (m-1)\vec{B'M} = m\vec{c} - (\vec{a} + \vec{b})$$

$$\text{Vậy : } \vec{B'M} = -\frac{1}{m-1}\vec{a} - \frac{1}{m-1}\vec{b} + \frac{m}{m-1}\vec{c}$$

Tương tự ta cũng có :

$$\frac{\vec{NC}}{\vec{ND'}} = n$$

$$\Rightarrow \vec{NC} = n\vec{ND'}$$

$$\Rightarrow \vec{B'C} - \vec{B'N} = n(\vec{B'D'} - \vec{B'N})$$

$$\Rightarrow (n-1)\vec{B'N} = n\vec{B'D'} - \vec{B'C}$$

$$\Rightarrow (n-1)\vec{B'N} = n(\vec{a} + \vec{c}) - (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\text{Vậy : } \vec{B'N} = \frac{n}{n-1}\vec{a} - \frac{1}{n-1}\vec{b} + \frac{n}{n-1}\vec{c}$$

$$2. \text{ Ta có : } \vec{B'D} = \vec{B'D'} + \vec{B'B} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

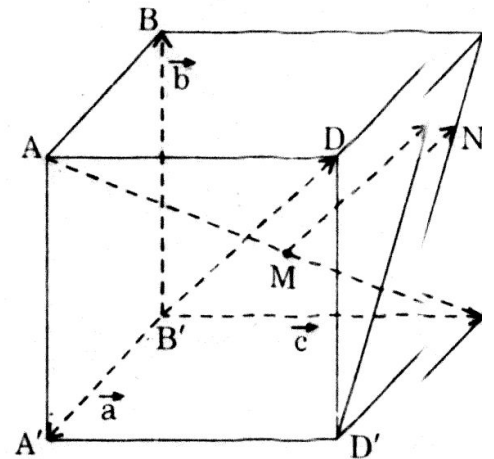
Mặt khác theo câu 1 ta có :

$$\vec{MN} = \vec{B'N} - \vec{B'M}$$

$$= \left(\frac{n}{n-1} + \frac{1}{m-1}\right)\vec{a} + \left(-\frac{1}{n-1} + \frac{1}{m-1}\right)\vec{b} + \left(1 - \frac{m}{m-1}\right)\vec{c}$$

$$\text{Vậy ta có : } MN \parallel B'D \Leftrightarrow \vec{MN} = k\vec{BD}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n}{n-1} + \frac{1}{m-1} = k \\ -\frac{1}{n-1} + \frac{1}{m-1} = k \\ 1 - \frac{m}{m-1} = k \end{cases}$$



h.1.16

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n}{n-1} + \frac{1}{m-1} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{m-1} \\ \frac{n}{n-1} + \frac{1}{m-1} = 1 + \frac{m}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ m = -3 \end{cases}$$

Vậy để MN song song với BD ta phải có $m = -3$ và $n = -1$.

$$3 \quad MN \parallel BD \Rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n = -1 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \vec{MN} = \frac{1}{4} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\Rightarrow MN^2 = \frac{1}{16} (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\text{Vậy: } MN = \frac{1}{4} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Bài 10 Cho hình lục giác đều ABCDEF.

1. Hãy biểu diễn các vectơ $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{AF}$, $\vec{EF}$ qua các vectơ $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AE}$.

2. A' , B' , C' là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Hãy tính: $\vec{BC} \cdot \vec{AA'} + \vec{CA} \cdot \vec{BB'} + \vec{AB} \cdot \vec{CC'}$.

Giải

$$1. \text{ Ta có: } \vec{AD} = \vec{AE} + \vec{ED}$$

$$\vec{AD} = \vec{v} + \vec{u}$$

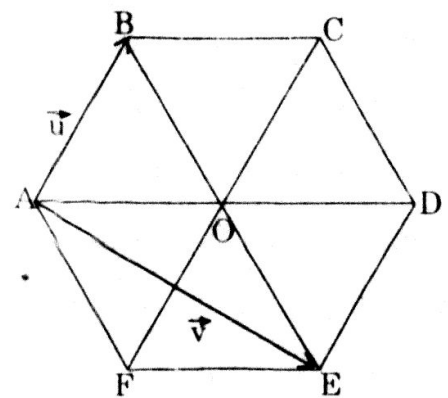
$$\vec{EF} = -\frac{1}{2} \vec{AD} = -\frac{1}{2} (\vec{u} + \vec{v})$$

$$\vec{AF} = \vec{AE} + \vec{EF} = \vec{v} - \frac{1}{2} (\vec{u} + \vec{v})$$

$$\vec{AF} = -\frac{1}{2} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{v} - \vec{u})$$

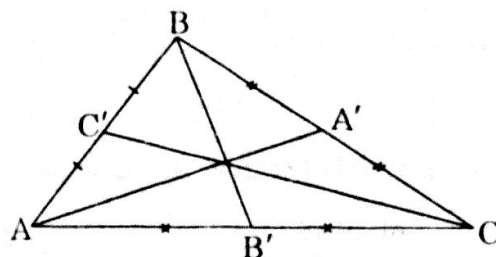
$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AO} = \vec{u} + \frac{1}{2} (\vec{u} + \vec{v})$$

$$\vec{AC} = \frac{3}{2} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{v}$$



h.1.17

2.



Ta có : $S = \vec{BC} \cdot \vec{AA'} + \vec{CA} \cdot \vec{BB'} + \vec{AB} \cdot \vec{CC'}$

$$S = \frac{1}{2} \vec{BC} (\vec{AB} + \vec{AC}) + \frac{1}{2} \vec{CA} (\vec{BA} + \vec{BC}) + \frac{1}{2} \vec{AB} (\vec{CA} + \vec{CB})$$

$$S = \frac{1}{2} (\vec{BC} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{CB} + \vec{BC} \cdot \vec{AC} + \vec{CA} \cdot \vec{BC} + \vec{CA} \cdot \vec{BA} +$$

$$+ \vec{AB} \cdot \vec{CA})$$

$$S = 0$$

Vậy : $\vec{BC} \cdot \vec{AA'} + \vec{CA} \cdot \vec{BB'} + \vec{AB} \cdot \vec{CC'} = 0.$

BÀI TẬP

1. Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng nếu M là một điểm thuộc mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện thì $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}|$ không đổi.

2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Đặt $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, $\vec{AA'} = \vec{c}$.

Chứng minh rằng hình hộp này hình hộp chữ nhật khi và chỉ khi :

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = |\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}| = |-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$$

3. Cho tứ diện ABCD. Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

$$\vec{MD} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$$

4. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và D'C'. Chứng minh rằng $\vec{BM}$ vuông góc với $\vec{AN}$.

5. Cho tứ diện ABCD, gọi (α) , (β) , (γ) , (θ) là các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện lần lượt tại A, B, C, D. Chứng minh rằng nếu giao tuyến của (α) và (β) đồng phẳng với CD thì giao tuyến của (γ) và (θ) đồng phẳng với AB.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

1. Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Chứng minh : $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{MO}$

2. Chứng minh : $\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{b} \\ \vec{a} \perp \vec{c} \\ \vec{b} \perp \vec{c} \end{cases}$

3. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh M, D, G thẳng hàng.

4. Đặt $\vec{AB} = \vec{e}_1$; $\vec{AD} = \vec{e}_2$; $\vec{AA'} = \vec{e}_3$.

Phân tích $\vec{BM}$ và $\vec{AN}$ theo $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Chứng minh : $\vec{BM} \cdot \vec{AN} = 0$.

5. Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Dùng tính chất : $M \in (\alpha) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{OA} = 0$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN

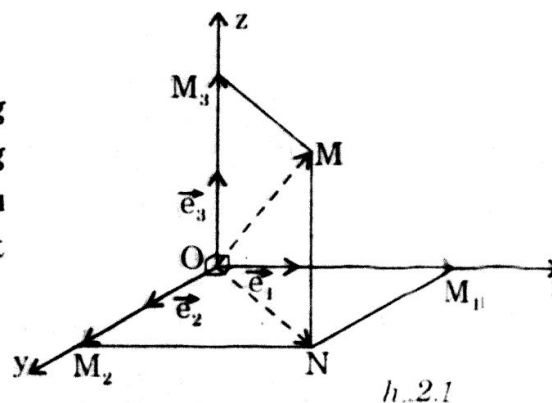
LC/1623

Chương 2

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIẢN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc trong không gian bao gồm ba đường thẳng $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ vuông góc với nhau từng đôi một, trên đó có chọn lần lượt các vectơ đơn vị $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.



2. Tọa độ của một điểm :

$$M(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

3. Tọa độ của một vectơ :

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

4. Các công thức về tọa độ :

Cho $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Ta có :

$$1. \quad \vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$2. \quad \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$3. \quad \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$4. \quad \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$5. \quad k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

$$6. \quad \vec{AM} = k\vec{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + kx_B}{1+k} \\ y_M = \frac{y_A + ky_B}{1+k} \\ z_M = \frac{z_A + kz_B}{1+k} \end{cases}$$

7. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
8. $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$
9. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
10. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
11. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
12. $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Để xác định tọa độ điểm $M(x, y, z)$ trong không gian ta thường theo các bước sau :

- Xác định đẳng thức vectơ có liên quan đến điểm M.
- Biến đổi thành đẳng thức về tọa độ.
- Giải hệ phương trình với ẩn số là x, y, z .
- Nghiệm (x_0, y_0, z_0) cho ta điểm M.

2. Để phân biệt một vectơ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ theo ba vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$; $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ song song đồng phẳng ta làm theo các bước :

- Giả sử : $\vec{v} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$
- Giải hệ phương trình sau để tìm m, n, p

$$\begin{cases} v_1 = ma_1 + nb_1 + pc_1 \\ v_2 = ma_2 + nb_2 + pc_2 \\ v_3 = ma_3 + nb_3 + pc_3 \end{cases}$$

3. Lưu ý ba quan hệ thường dùng nhất :

$$\bullet \begin{cases} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng} \\ (\vec{b}, \vec{c} \text{ khác phương}) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$$

$$\bullet \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$$

$$\bullet \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

C. BÀI TẬP

Bài 1 Trong không gian Oxyz cho điểm : A(1, 0, -2), B(2, 1, -1), C(1, -2, 2).

1. Tìm tọa độ trung điểm M của cạnh AB.
2. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.
3. Tìm độ dài cạnh BC.

Giải

1. M là trung điểm của AB $\Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{MB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{3}{2} \\ y_M = \frac{1}{2} \\ z_M = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{Vậy : } M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

2. G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1+2+1}{3} = \frac{4}{3} \\ y_G = \frac{0+1-2}{3} = -\frac{1}{3} \\ z_G = \frac{-2-1+2}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy : $G\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

3. $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2}$
 $BC = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{19}.$

Bài 2 Trong không gian Oxyz cho ba vectơ :

$$\vec{a} = (2, 3, 1); \quad \vec{b} = (5, 7, 0); \quad \vec{c} = (3, -2, 4)$$

1. Chứng tỏ rằng ba vectơ này không đồng phẳng.
2. Cho vectơ $\vec{d} = (4, 12, -3)$. Hãy phân tích vectơ $\vec{d}$ theo ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Giải

1. Ta dùng phương pháp phản chứng.

Giả sử $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

$$\Leftrightarrow \vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m + 3n = 2 & (1) \\ 7m - 2n = 3 & (2) \\ 4n = 1 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \text{ và } (3) \Rightarrow \begin{cases} n = \frac{1}{4} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{5}{2} + \frac{3}{4} = 2. \text{ Vô lí.}$$

Vậy : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

2. Ta tìm các số m, n, p sao cho $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 5n + 3p = 4 \\ 3m + 7n - 2p = 12 \\ m + 0 + 4p = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \\ p = -1 \end{cases}$$

Vậy ta phân tích được : $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Bài 3 Trong không gian Oxyz cho ba vectơ :

$$\vec{a} = (1, 2, 3), \quad \vec{b} = (4, 5, 6), \quad \vec{c} = (2, 1, 0).$$

Chúng tỏ rằng ba vectơ đó đồng phẳng.

Giải

Ta tìm 2 số m và n sao cho : $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ (1)

$$\text{Ta có : } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} m + 4n = 2 \\ 2m + 5n = 1 \\ 3m + 6n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}$$

Vậy : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Bài 4

Trong không gian Oxyz cho các điểm A(1, 1, -2), B(4, 0, -1), C(-1, 7, 0), D(0, -2, -4), E(2, 2, 1). Chứng tỏ rằng :

1. Bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một mặt phẳng.
2. Bốn điểm A, B, C, E không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Giải

Ta có : $\vec{AB} = (3, -1, 1)$, $\vec{AC} = (-2, 6, 2)$;
 $\vec{AD} = (-1, -3, -2)$; $\vec{AE} = (1, 1, 3)$.

1. Ta tìm 2 số m, n sao cho : $\vec{AC} = m\vec{AB} + n\vec{AD}$ (1)

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m - n = -2 \\ -m - 3n = 6 \\ m - 2n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{6}{5} \\ n = -\frac{8}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \vec{AC} = -\frac{6}{5}\vec{AB} - \frac{8}{5}\vec{AD}$

$\Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ đồng phẳng

Vậy : A, B, C, D đồng phẳng.

2. Ta dùng phương pháp phản chứng.

Giả sử $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE}$ đồng phẳng :

$$\vec{AB} = m\vec{AC} + n\vec{AE} \Rightarrow \begin{cases} -2m + n = 3 & (1) \\ 6m + n = -1 & (2) \\ 2m + 3n = 1 & (3) \end{cases}$$

(1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = 2 \end{cases}$

Thay vào : (3) $\Rightarrow -1 + 6 = 1$ (vô lí)

$\Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE}$ không đồng phẳng.

Vậy bốn điểm A, B, C, E không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Bài 5

Trong không gian Oxyz cho ba vector $\vec{a} = (5, 7, 2)$, $\vec{b} = (3, 0, 4)$

$\vec{c} = (-6, 1, -1)$. Tìm vector :

1. $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

2. $5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c}$.

Giải

Tìm một vectơ nghĩa là tìm tọa độ của vectơ đó :

1. Đặt $\vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$

Ta có : $\vec{u} = (3(5) - 2(3) + (-6); 3(7) - 2(0) + 1; 3(2) - 2(4) + (-1))$

$$\vec{u} = (3, 22, -3)$$

2. Đặt $\vec{v} = 5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c}$

Ta có : $\vec{v} = (5(5) + 6(3) + 4(-6); 5(7) + 6(0) + 4(1); 5(2) + 6(4) + 4(-1))$

$$\vec{v} = (19, 39, 30)$$

Bài 6

Trong không gian Oxyz cho ba điểm A(2, 0, 0), C(0, 3, 0), O'(0, 0, 4).
Dựng hình hộp chữ nhật OABC.O'A'B'C'.

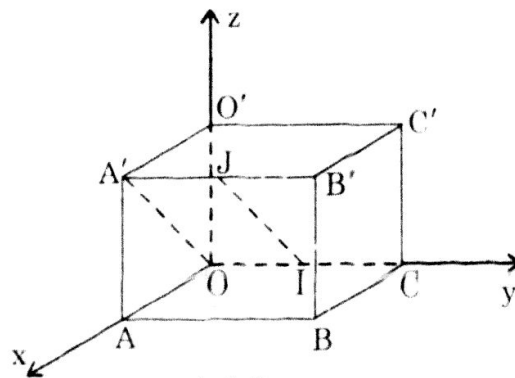
1. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật ấy.

2. Chứng tỏ rằng $\vec{AC'}$ và $\vec{OB'}$ không cùng phương.

3. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của OC và A'B'.

Chứng tỏ rằng $\vec{OA'}$, $\vec{BC'}$, $\vec{IJ}$ đồng phẳng

4. $\vec{OB}$, $\vec{OB'}$, $\vec{OA'}$ có đồng phẳng không ? Tại sao ?



h.2.2

Giải

1. Ta có : $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{OC} \Rightarrow B(2, 3, 0)$

$$\vec{OA'} = \vec{OA} + \vec{OO'} \Rightarrow A'(2, 0, 4)$$

$$\vec{OC'} = \vec{OC} + \vec{OO'} \Rightarrow C'(0, 3, 4)$$

$$\vec{OB'} = \vec{OB} + \vec{OO'} \Rightarrow B'(2, 3, 4)$$

2. Ta có : $\vec{AC'} = (-2, 3, 4)$; $\vec{OB'} = (2, 3, 4)$

Giả sử $\vec{AC'}$ cùng phương với $\vec{OB'}$

$$\Rightarrow \vec{AC'} = k \vec{OB'} \Rightarrow \begin{cases} -2 = 2k \\ 3 = 3k \\ 4 = 4k \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$(1) \Rightarrow k = -1$$

Thay vào : (2) $\Rightarrow 3 = -3$, vô lí

Vậy : $\vec{AC'}$ và $\vec{OB'}$ không cùng phương.

3. Trước hết ta tìm tọa độ của I, J

I là trung điểm của OC $\Rightarrow I\left(0, \frac{3}{2}, 0\right)$

J là trung điểm của A'B' $\Rightarrow J\left(2, \frac{3}{2}, 4\right)$

$$\Rightarrow \vec{IJ} = (2, 0, 4).$$

Ta có : $\vec{OA'} = (2, 0, 4)$; $\vec{BC'} = (-2, 0, 4)$

Ta tìm m, n sao cho : $\vec{OA'} = m \vec{BC'} + n \vec{IJ}$ (1)

$$\text{Ta có : } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 2n = 2 \\ 0m + 0n = 0 \\ 4m + 4n = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{OA'} = 0 \cdot \vec{BC'} + n \cdot \vec{IJ}$$

Vậy : $\vec{OA'}$, $\vec{BC'}$, $\vec{IJ}$ đồng phẳng.

4. Giả sử : $\vec{OB}, \vec{OB'}, \vec{OA'}$ đồng phẳng $\Rightarrow \vec{OB} = m \vec{OB'} + n \vec{OA'}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m + 2n = 2 \\ 3m = 3 \\ 4m + 4n = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$(1) \text{ và } (2) \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 0 \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow 4 = 0, \text{ vô lí.}$$

Vậy : $\vec{OB}, \vec{OB'}, \vec{OA'}$ không đồng phẳng.

Bài 7

Trong không gian Oxyz cho hình tứ diện ABCD, biết :

$$A(2, 3, 1); B(4, 1, -2); C(6, 3, 7); D(-5, -4, 8).$$

Tìm độ dài đường cao của hình tứ diện phát xuất từ đỉnh D.

Giải

Gọi $H(x, y, z)$ là hình chiếu của D lên mặt phẳng ABC.

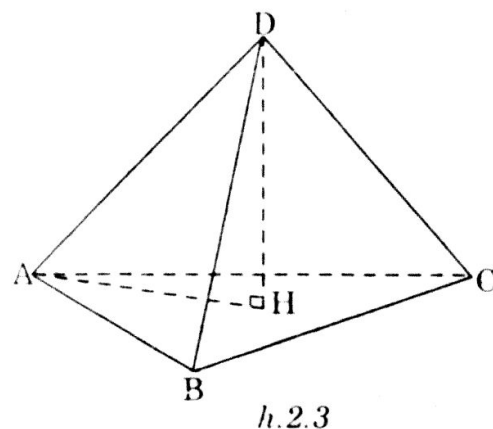
Ta có : $\vec{DH} = (x + 5, y + 4, z - 8)$

$$\vec{AB} = (2, -2, -3)$$

$$\vec{AC} = (4, 0, 6)$$

$$\vec{AH} = (x - 2, y - 3, z - 1)$$

Ta có :
$$\begin{cases} \vec{DH} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{DH} \cdot \vec{AC} = 0 \\ \vec{DH} \cdot \vec{AH} = 0 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x + 5) - 2(y + 4) - 3(z - 8) = 0 & (1) \\ 4(x + 5) + 6(z - 8) = 0 & (2) \\ (x - 2)(x + 5) + (y - 3)(y + 4) + (z - 1)(z - 8) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \text{ và } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 6 \\ z = \frac{14 - 2x}{3} \end{cases}$$

Thay vào (3) ta được :

$$(x - 2)(x + 5) + (2x + 3)(2x + 10) + \left(\frac{11 - 2x}{3}\right)\left(\frac{-2x - 10}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 49x^2 + 259x + 70 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 + 37x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{7} \\ x = -5 \end{cases}$$

Trường hợp 1 : $x = -5 \Rightarrow y = -4 \text{ và } z = 8$

$\Rightarrow H \equiv D \text{ (loại)}.$

Trường hợp 2: $x = -\frac{2}{7} \Rightarrow y = 2x + 6 = \frac{38}{7}$

$$z = \frac{14 - 2x}{3} = \frac{34}{7}$$

$$\Rightarrow H = \left(-\frac{2}{7}, \frac{38}{7}, \frac{34}{7} \right)$$

$$\vec{DH} = \left(\frac{33}{7}, \frac{66}{7}, -\frac{22}{7} \right)$$

$$\Rightarrow DH = \sqrt{\left(\frac{33}{7}\right)^2 + \left(\frac{66}{7}\right)^2 + \left(-\frac{22}{7}\right)^2} = \frac{11}{7} \sqrt{9 + 36 + 4} = \frac{11}{7} \sqrt{49} = 11$$

Vậy độ dài đường cao của tứ diện phát xuất từ đỉnh D là : $DH = 11$.

GHI CHÚ : Khi học đến công thức khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng ta sẽ có cách giải ngắn gọn hơn.

Bài 8 Trong không gian Oxyz cho một vectơ tùy ý $\vec{a}$. Gọi α, β, γ là ba góc tạo bởi ba vectơ đơn vị $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, trên ba trục Ox, Oy, Oz và vectơ $\vec{a}$. Chứng minh rằng : $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Giải

Gọi a là mô đun của $\vec{a}$ ta có :

$$\vec{a} = (a \cos \alpha; a \cos \beta; a \cos \gamma)$$

$$\Rightarrow a = |\vec{a}| = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \cos^2 \beta + a^2 \cos^2 \gamma}$$

$$\Rightarrow a = a \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}$$

Vậy : $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Bài 9 Cho tam giác ABC, biết $A(1, 2, -1)$, $B(2, -1, 3)$, $C(-4, 7, 5)$. Tính độ dài đường phân giác trong kẻ từ đỉnh B.

Giải

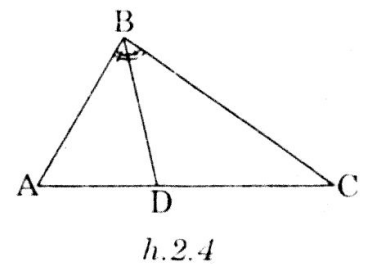
Gọi D là chân phân giác trong góc B, ta có :

$$\frac{\vec{AD}}{\vec{DC}} = \frac{BA}{BC} = \frac{\sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2 + (3+1)^2}}{\sqrt{(2+4)^2 + (-1-7)^2 + (3-5)^2}} = \frac{1}{2} = k$$

$$\Rightarrow D \begin{cases} x_D = \frac{x_A + kx_C}{1+k} = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot (-4)}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \\ y_D = \frac{y_A + ky_C}{1+k} = \frac{2 + \frac{1}{2} \cdot 7}{\frac{3}{2}} = \frac{11}{3} \\ z_D = \frac{z_A + kz_C}{1+k} = \frac{-1 + \frac{1}{2} \cdot 5}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{3} \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{3}{3}\right)$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{\left(-\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{11}{3} + 1\right)^2 + \left(\frac{3}{3} - 3\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{64 + 196 + 36} = \frac{2}{3} \sqrt{74}$$



Vậy độ dài đường phân giác trong kẻ từ đỉnh B là : $BD = \frac{2\sqrt{74}}{3}$.

Bài 10 Trong không gian Oxyz cho ba điểm A(1, 2, 4), B(2, -1, 0), C(-2, 3, -1).

1. Gọi (x, y, z) là tọa độ của điểm M nằm trên mặt phẳng (ABC).
Tìm sự liên hệ giữa x, y, z.
2. Tìm tọa độ của điểm D biết rằng hình ABCD là hình bình hành.
3. Tìm diện tích hình bình hành ABCD.

Giải

1. Ta có : $\vec{AM} = (x - 1, y - 2, z - 4)$

$$\vec{AB} = (1, -3, -4)$$

$$\vec{AC} = (-3, 1, -5)$$

Ta thấy $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ khác phương.

Vậy : Điểm M(x, y, z) nằm trên mặt phẳng (ABC)

$$\Rightarrow \vec{AM} = m\vec{AB} + n\vec{AC} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = m - 3n & (1) \\ y - 2 = -3m + n & (2) \\ z - 4 = -4m - 5n & (3) \end{cases}$$

$$(1) \text{ và } (2) \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{x + 3y - 7}{-8} \\ n = \frac{3x + y - 5}{-8} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Thay vào (3) ta được : } z - 4 &= \frac{x + 3y - 7}{2} + \frac{5(3x + y - 5)}{8} \\ \Rightarrow 19x + 17y - 8z - 21 &= 0 \end{aligned}$$

Hệ thức trên chính là hệ thức liên hệ giữa x, y, z khi điểm $M(x, y, z)$ nằm trên mặt phẳng (ABC).

2. ABCD là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2 - x_D \\ -3 = 3 - y_D \\ -4 = -1 - z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = 6 \\ z_D = 3 \end{cases}$$

Vậy : $D(-3, 6, 3)$.

3. Ta có: $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = AB \cdot AC \sin \widehat{BAC}$

$$\vec{AB} = (1, -3, -4) \Rightarrow AB = |\vec{AB}| = \sqrt{26}$$

$$\vec{AC} = (-3, 1, -5) \Rightarrow AC = |\vec{AC}| = \sqrt{35}$$

$$|\cos \widehat{BAC}| = |\cos(\vec{AB}, \vec{AC})| = \frac{14}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{35}} = \frac{14}{\sqrt{910}}$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{BAC} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{BAC}} = \sqrt{1 - \frac{14^2}{910}} = \sqrt{\frac{714}{910}}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \sqrt{26} \cdot \sqrt{35} \cdot \sqrt{\frac{714}{910}} = \sqrt{714}$$

Vậy : $S_{ABCD} = \sqrt{714}$ (đơn vị diện tích).

Bài 11 Trong không gian Oxyz tìm vectơ đơn vị $\vec{e}$ cùng hướng với vectơ $\vec{a} = (1, 2, 2)$.

Giải

$$\text{Ta có : } \vec{a} = (1, 2, 2) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

$$\vec{e} \text{ cùng hướng với } \vec{a} \Rightarrow \vec{e} = k \vec{a} \quad (k > 0)$$

$$\vec{e} \text{ là vectơ đơn vị} \Rightarrow |\vec{e}| = 1$$

$$\Rightarrow k|\vec{a}| = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{e} = \frac{1}{3} \vec{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Vậy vectơ đơn vị cùng hướng với $\vec{a}$ là : $\vec{e} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$.

Bài 12 Trong không gian Oxyz tìm vectơ đơn vị $\vec{e}$ vuông góc với các vectơ $\vec{a} = (4, 0, -3)$, $\vec{b} = (2, 1, 0)$ và tạo với trục Ox một góc tù.

Giải

Đặt : $\vec{e} = (x_1, x_2, x_3)$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} \vec{e} \perp \vec{a} \\ \vec{e} \perp \vec{b} \\ |\vec{e}| = 1 \\ \vec{e} \cdot \vec{e}_1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{\sqrt{61}} \\ x_2 = \frac{6}{\sqrt{61}} \\ x_3 = -\frac{4}{\sqrt{61}} \end{cases}$$

Vậy vectơ cần tìm là : $\vec{e} = \left(-\frac{3}{\sqrt{61}}, \frac{6}{\sqrt{61}}, -\frac{4}{\sqrt{61}} \right)$.

Bài 13 Trong không gian Oxyz cho ba điểm A, B, C. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm chia các đoạn thẳng AB, BC, CA theo cùng tỉ số k ($k \neq -1$)

1. Chứng tỏ rằng : $\vec{DB} + \vec{EC} + \vec{FA} = \vec{0}$.
2. Cho biết A(2, 1, -3), B(3, -2, 2), C(4, 0, 1). Tìm tọa độ các điểm D, E, F theo k.
3. Tìm diện tích của tam giác ABC.

Giải

1. Ta có : $\vec{AD} = k\vec{DB} \Leftrightarrow \vec{DB} = \frac{1}{k+1} \vec{AB}$

Tương tự : $\vec{EC} = \frac{1}{k+1} \vec{BC}$

$\vec{FA} = \frac{1}{k+1} \vec{CA}$

$$\Rightarrow \vec{DB} + \vec{EC} + \vec{FA} = \frac{1}{k+1} (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = \vec{0}$$

Vậy : $\vec{DB} + \vec{EC} + \vec{FA} = \vec{0}$.

$$2. \quad \vec{AD} = k \vec{DB} \Rightarrow \begin{cases} x_D = \frac{x_A + kx_B}{1+k} = \frac{2+3k}{1+k} \\ y_D = \frac{y_A + ky_B}{1+k} = \frac{1-2k}{1+k} \\ z_D = \frac{z_A + kz_B}{1+k} = \frac{-3+2k}{1+k} \end{cases}$$

Vậy : $D\left(\frac{2+3k}{1+k}, \frac{1-2k}{1+k}, \frac{-3+2k}{1+k}\right)$.

Tương tự ta có :

$$E\left(\frac{3+4k}{1+k}, \frac{-2}{1+k}, \frac{2+k}{1+k}\right); \quad F\left(\frac{4+2k}{1+k}, \frac{k}{1+k}, \frac{1-3k}{1+k}\right).$$

$$3. \quad \vec{AB} = (1, -3, 5)$$

$$\vec{AC} = (2, -1, 4)$$

$$AB = |\vec{AB}| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$$

$$AC = |\vec{AC}| = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$$

$$|\cos A| = \frac{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{(2+3+20)}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{21}} = \frac{25}{\sqrt{735}}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{625}{735}} = \frac{\sqrt{110}}{\sqrt{735}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{110}$$

Vậy : $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{110}$ (đơn vị diện tích).

Bài 14 Trong không gian Oxyz cho A(1, 0, 1), B(-2, 1, 3), C(1, 4, 0).

1. Tìm hệ thức giữa x, y, z để điểm M (x, y, z) thuộc mặt phẳng (ABC).
2. Tìm trực tâm H của tam giác ABC.
3. Tìm tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

1. Ta có: $\vec{AM} = (x - 1, y, z - 1)$

$$\vec{AB} = (-3, 1, 2)$$

$$\vec{AC} = (0, 4, -1)$$

Ta có: $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ khác phương

Vậy: $M \in ABC \Leftrightarrow \vec{AM} = m\vec{AB} + n\vec{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -3m & (1) \\ y = m + 4n & (2) \\ z - 1 = 2m - n & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow m = \frac{x - 1}{-3}$$

$$(2) \Leftrightarrow n = \frac{y - m}{4} = \frac{y + \frac{x - 1}{3}}{4} = \frac{3y + x - 1}{12}$$

$$(1), (2), (3) \Leftrightarrow z - 1 = 2 \cdot \frac{(x - 1)}{-3} - \frac{3y + x - 1}{12}$$

$$\Leftrightarrow 12(z - 1) = -8(x - 1) - (3y + x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 9x + 3y + 12z - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + y + 4z - 7 = 0$$

Vậy: $M(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow 3x + y + 4z - 7 = 0$.

2. $H(x, y, z)$ là trực tâm của tam giác ABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{BH} \cdot \vec{CA} = 0 \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4y - z - 1 = 0 \\ 3x + y + 4z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{13} \\ y = \frac{7}{13} \\ z = \frac{15}{13} \end{cases}$$

Vậy: $H\left(\frac{8}{13}, \frac{7}{13}, \frac{15}{13}\right)$.

3. $I(x, y, z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 2z + 6 = 0 \\ 8x - 2z - 15 = 0 \\ 3x + y + 4z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{13} \\ y = \frac{29}{13} \\ z = \frac{37}{26} \end{cases}$$

Vậy tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tọa độ là :

$$I\left(-\frac{4}{13}, \frac{29}{13}, \frac{37}{26}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } R = IA &= \sqrt{\left(1 + \frac{4}{13}\right)^2 + \left(-\frac{29}{13}\right)^2 + \left(1 - \frac{37}{26}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{17}{13}\right)^2 + \left(\frac{29}{13}\right)^2 + \left(\frac{11}{26}\right)^2} \\ &= \frac{1}{13} \sqrt{17^2 + 29^2 + \frac{11^2}{4}} = \frac{\sqrt{4641}}{26} \end{aligned}$$

Vậy bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là :

$$R = \frac{\sqrt{4641}}{26}.$$

BÀI TẬP

1. Cho bốn điểm $A(4, 2, 3)$, $B(-2, 1, -1)$, $C(3, 8, 7)$, $D(-6, 2, z)$.

a) Chứng minh rằng ABC là tam giác cân.

b) Tìm z để ABD là tam giác cân tại B.

c) Tính tọa độ trọng tâm G của tam giác ABD.

d) Tính diện tích tam giác ABC.

2. Tìm m để :

a) $\vec{a} = (2, 3, -4)$ cùng phương với $\vec{b} = (m, -6, 8)$.

b) $\vec{a} = (1, m, -2)$ vuông góc với $\vec{b} = (m, 3, -4)$.

3. Cho ba vector $\vec{a} = (1, 1, -2)$, $\vec{b} = (m, 3, -4)$, $\vec{c} = (0, 2, 3)$

- a) Chứng minh rằng ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.
- b) Phân tích $\vec{d} = (1, 1, 1)$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
4. Cho tứ diện ABCD với A(3, 1, -2), B(2, -5, 1), C(-1, 8, 4), D(1, -2, 6).
- a) Tính tọa độ chân H của đường cao AH của tứ diện.
- b) Tính đường cao AH và thể tích của tứ diện.
5. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (xOy) và cách đều các điểm A(1, -1, 5), B(3, 4, 4), C(4, 6, 1).

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) Chứng minh $AB = AC$.

b) $z = 5$ hay $z = -7$.

c) $G_1\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$; $G_2\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

d) Dùng công thức: $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \sin(\widehat{AB, AC}) = \frac{\sqrt{2553}}{2}$.

2. a) $m = -4$

b) $m = -2$

3. a) Dùng phản chứng.

b) $\vec{d} = \frac{2}{5} \vec{a} + \frac{3}{5} \vec{b} + \frac{3}{5} \vec{c}$.

4. a) Dùng các điều kiện:

$$\begin{cases} \vec{AB} \perp \vec{CB} \\ \vec{AB} \perp \vec{CD} \\ \vec{AB} \perp \vec{CH} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}, -1\right).$$

b) $AH = \frac{\sqrt{14}}{2}$, $v = 14$.

5. Đặt $M(x, y, 0)$

$$\begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \end{cases} \Rightarrow M(16, -5, 0).$$

MẶT PHẪNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Phương trình tham số** của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và có cặp vectơ chỉ phương :

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

là :

$$\begin{cases} x = x_0 + ma_1 + nb_1 \\ y = y_0 + ma_2 + nb_2 \\ z = z_0 + ma_3 + nb_3 \end{cases}$$

(Trong đó m, n là tham số)

2. **Phương trình tổng quát** của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và có vectơ pháp tuyến

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(Trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0)

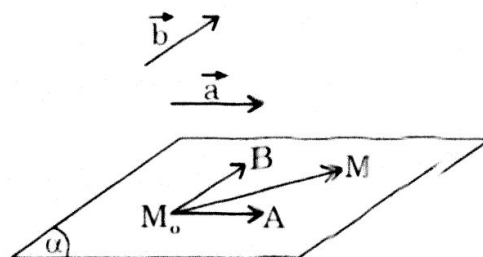
3. **Góc giữa hai mặt phẳng :**

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

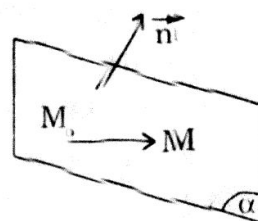
$$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\cos(\widehat{\alpha, \beta}) = |\cos(\widehat{\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta})|$$

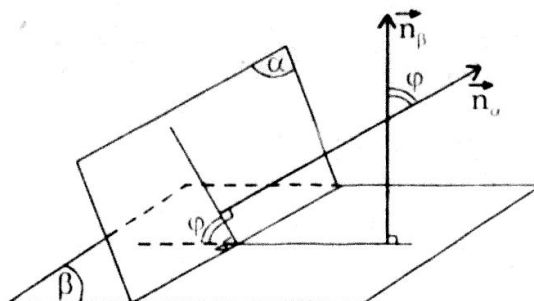
$$\cos(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



h.3.1



h.3.2



h.3.2a

4. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng :

$\alpha_1 \perp \alpha_2$	$\Leftrightarrow$	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
α_1 cắt α_2	$\Leftrightarrow$	$n_{\alpha_1}^* \neq k n_{\alpha_2}^* \quad (k \neq 0)$
	$\Leftrightarrow$	$A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$
$\alpha_1 // \alpha_2$	$\Leftrightarrow$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
$\alpha_1 \equiv \alpha_2$	$\Leftrightarrow$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Để lập phương trình tham số của mặt phẳng (α) ta thường dùng một trong hai cách sau :

CÁCH 1 :

- Tìm hai vectơ chỉ phương của α

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3); \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

- Tìm điểm cố định $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thuộc α .

- Phương trình tham số của α là :
$$\begin{cases} x = x_0 + ma_1 + nb_1 \\ y = y_0 + ma_2 + nb_2 \\ z = z_0 + ma_3 + nb_3 \end{cases}$$

CÁCH 2 : Nếu đã biết phương trình tổng quát của (α) :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

- Đặt $x = m, y = n$

- Phương trình tham số của α là :
$$\begin{cases} x = 0 + m + 0n \\ y = 0 + 0m + n \\ z = -\frac{D}{C} - m\frac{A}{C} - n\frac{B}{C} \end{cases}$$

2. Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm cố định $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A, B, C)$, ta thực hiện như sau :

- Viết phương trình α dưới dạng :

$$(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

- Thay tọa độ của điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ vào (α) để tìm D.
- Thay D vào (1) ta được phương trình tổng quát của (α)

(Ta cũng có thể dùng phương trình : $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$).

3. Tọa độ vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A, B, C)$ có thể tính được từ 2 vectơ chỉ phương :

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad (\vec{a} \neq k \vec{b})$$

theo quy tắc :
$$\vec{n} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

4. Nếu hai mặt phẳng song song thì :

- Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng này cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng kia.
- Vectơ chỉ phương của mặt phẳng này cũng là vectơ chỉ phương của mặt phẳng kia.

5. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì vectơ pháp tuyến của mặt phẳng này là một vectơ chỉ phương của mặt phẳng kia.

6. Chùm mặt phẳng :

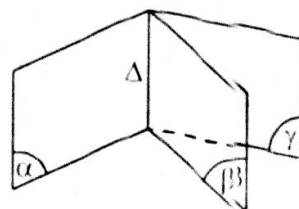
- Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến (Δ) , tập hợp các mặt phẳng (γ) chứa (Δ) được gọi là chùm mặt phẳng xác định bởi (α) và (β) .
- Nếu biết phương trình của (α) và (β) :

$$(\alpha) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$(\beta) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

thì phương trình của (γ) có dạng :

$$(\gamma) : m(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + n(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$



h.3.3

C. BÀI TẬP

Bài 1

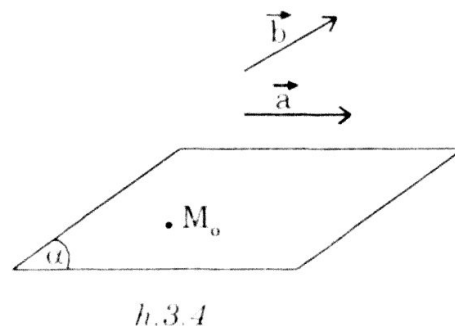
Trong không gian Oxyz viết phương trình tham số của các mặt phẳng :

- Đi qua điểm $M_0(1, 2, 3)$ và nhận $\vec{a} = (4, 6, 3)$, $\vec{b} = (2, 7, 5)$ làm vectơ chỉ phương.
- Đi qua 3 điểm $A(1, 1, 1)$, $B(2, 4, 5)$, $C(4, 1, 2)$.

Giải

- Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M_0 và nhận $\vec{a}$, $\vec{b}$ làm các vectơ chỉ phương, phương trình tham số của (α) là :

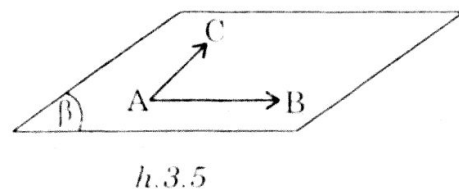
$$(\alpha) \begin{cases} x = 1 + 4m + 2n \\ y = 2 + 6m + 7n \\ z = 3 + 3m + 5n \end{cases}$$



- Gọi (β) là mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C . Ta có 2 vectơ chỉ phương của (β) là :

$$\vec{AB} = (1, 3, 4)$$

$$\vec{AC} = (3, 0, 1)$$



Vậy phương trình tham số của (β) là :

$$(\beta) \begin{cases} x = 1 + m + 3n \\ y = 1 + 3m \\ z = 1 + 4m + n \end{cases}$$

Bài 2

Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của các mặt phẳng (α) :

- Đi qua điểm $A(0, -1, 4)$ và nhận các vectơ $\vec{u} = (3, 2, 1)$, $\vec{v} = (-3, 0, 1)$ làm các vectơ chỉ phương.
- Đi qua hai điểm $E(4, -1, 1)$, $F(3, 1, -1)$ và song song với trục Ox.
- Đi qua ba điểm $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$.

Giải

- Phương trình tham số của (α) :

$$\begin{cases} x = 0 + 3m - 3n & (1) \\ y = -1 + 2m & (2) \\ z = 4 + m + n & (3) \end{cases}$$

Ta tìm phương trình tổng quát của (α)

Cách 1 : Khử tham số

$$(2) \Rightarrow m = \frac{y+1}{2}$$

$$(3) \Rightarrow n = z - 4 - m = z - 4 - \frac{y+1}{2} = \frac{2z - y - 9}{2}$$

Thay vào (1) ta có : $x = \frac{3(y+1)}{2} - \frac{3(2z - y - 9)}{2}$

$$\Rightarrow 2x - 6y + 6z - 30 = 0$$

Vậy phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là :

$$(\alpha) : x - 3y + 3z - 15 = 0.$$

Cách 2 : Dùng vectơ pháp tuyến.

$$(\alpha) \text{ có 2 vectơ chỉ phương : } \vec{u} = (3, 2, 1)$$

$$\vec{v} = (-3, 0, 1)$$

nên có vectơ pháp tuyến là :

$$\vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2, -6, 6)$$

Ta có một vectơ pháp tuyến khác của (α) là :

$$\vec{n}'_\alpha = (1, -3, 3)$$

Phương trình tổng quát của (α) có dạng :

$$x - 3y + 3z + D = 0$$

$$A(0, -1, 4) \in \alpha \Rightarrow 3 + 12 + D = 0 \Rightarrow D = -15$$

Vậy phương trình tổng quát của (α) là :

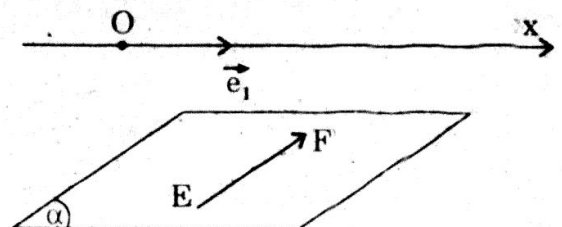
$$(\alpha) : x - 3y + 3z - 15 = 0.$$

2. (α) có 2 vectơ chỉ phương là :

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$$

$$\vec{EF} = (-1, 2, -2)$$

Phương trình tham số của (α) là :



h.3.6

$$x = 1 + m + n \quad (1)$$

$$(\alpha) \quad y = 1 + 0 + 2n \quad (2)$$

$$z = 1 + 0 + 2n \quad (3)$$

Phương trình tổng quát của (α) :

Cách 1 : Khử tham số.

Cộng (2) và (3) vế với vế ta có : $y + z = 0$

Vậy phương trình tổng quát của (α) là : $y + z = 0$.

Cách 2 : Dùng vectơ pháp tuyến là :

(α) có vectơ pháp tuyến là :

$$\vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (0, 2, 2)$$

$$\vec{n}'_\alpha = (0, 1, 1)$$

Phương trình tổng quát của (α) có dạng :

$$y + z + D = 0$$

$$E(4, -1, 1) \in (\alpha) \Rightarrow -1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = 0.$$

Vậy phương trình tổng quát của (α) là : $y + z = 0$.

3. (α) có 2 vectơ chỉ phương là :

$$\vec{AB} = (-a, b, 0)$$

$$\vec{AC} = (-a, 0, c)$$

Phương trình tham số của (α) là :

$$\begin{cases} x = a - ma - na & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = mb & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = nc & (3) \end{cases}$$

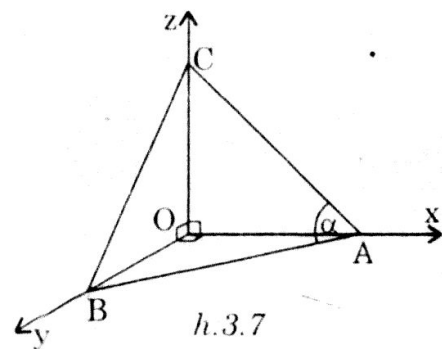
Phương trình tổng quát của (α) :

Cách 1 : Khử tham số

$$(2) \Rightarrow m = \frac{y}{b}$$

$$(3) \Rightarrow n = \frac{z}{c}$$

$$(1) \Rightarrow x = a - \frac{ay}{b} - \frac{az}{c} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



Cách 2 : Dùng vectơ pháp tuyến.

(α) có vectơ pháp tuyến là :

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -a \\ c & -a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} \right) = (bc, ac, ab)$$

Phương trình tổng quát của (α) có dạng :

$$bcx + acy + abz + D = 0 \quad (44)$$

$$A(a, 0, 0) \in (\alpha) \Rightarrow bca + D = 0 \Rightarrow D = -abc$$

Thay vào (4) ta được : $bcx + acy + abz - abc = 0$

Vậy phương trình tổng quát của (α) là :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (55)$$

CHÚ Ý : (5) còn gọi là phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

Bài 3 Cho mặt phẳng (α) có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = 2 + 3t_1 - 4t_2 \\ y = 4 - t_2 \\ z = 2 - 3t_1 \end{cases}$$

1. Hãy lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) .

2. Hãy lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (β) đi qua điểm $A(1, 2, 3)$ và song song với mặt phẳng (α) .

Giải

$$1. \text{ Ta có : } (\alpha) \begin{cases} x = 2 + 3t_1 - 4t_2 & (1) \\ y = 4 - t_2 & (2) \\ z = 2 - 3t_1 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow t_1 = \frac{2 - z}{3}$$

$$(2) \Rightarrow t_2 = 4 - y$$

$$(1) \Rightarrow x = 2 + (2 - z) - 4(4 - y)$$

$$\Rightarrow x - 4y + z + 12 = 0$$

Vậy phương trình tổng quát của (α) là : $x - 4y + z + 12 = 0$.

2. Vì $(\beta) \parallel (\alpha)$ nên phương trình của (β) có dạng :

$$(\beta) : x - 4y + z + D = 0$$

$$A(1, 2, 3) \in (\beta) \Rightarrow 1 - 8 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = 4$$

$$\Rightarrow (\beta): x - 4y + z + 4 = 0$$

Vậy phương trình tổng quát của mặt phẳng (β) đi qua điểm $A(1, 2, 3)$ và song song với mặt phẳng (α) là :

$$x - 4y + z + 4 = 0.$$

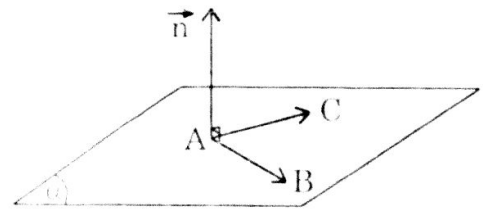
Bài 4 Trong không gian Oxyz. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua 3 điểm không thẳng hàng $A(1, -1, 2)$, $B(0, 3, 0)$, $C(2, 1, 0)$.

Giải

(α) có 2 vectơ chỉ phương là :

$$\vec{AB} = (-1, 4, -2)$$

$$\vec{AC} = (1, 2, -2)$$



h.3.8

(α) có vectơ pháp tuyến là :

$$\vec{n} = (-4, -4, -6) \quad \text{hay} \quad \vec{n}' = (2, 2, 3)$$

Phương trình tổng quát của (α) có dạng : $2x + 2y + 3z + D = 0$

$$A(1, -1, 2) \in (\alpha) \Rightarrow 2 - 2 + 6 + D = 0 \Rightarrow D = -6$$

Vậy phương trình tổng quát của (α) là : $2x + 2y + 3z - 6 = 0$.

Bài 5 Lập phương trình tổng quát của các mặt phẳng tọa độ và các mặt phẳng đi qua điểm $I(2, 6, -3)$ và song song với các mặt phẳng tọa độ.

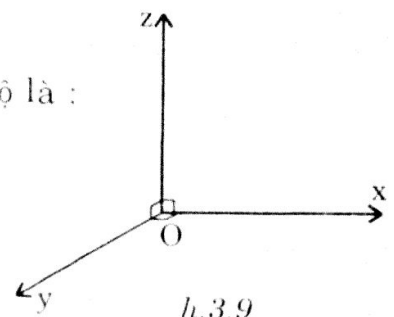
Giải

Phương trình tổng quát của các mặt phẳng tọa độ là :

$$(xOy) : z = 0$$

$$(yOz) : x = 0$$

$$(zOx) : y = 0$$



h.3.9

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua $I(2, 6, -3)$ và song song với mặt phẳng (xOy)

Phương trình (α) có dạng : $(\alpha) : z + D = 0$

$$I \in (\alpha) \Rightarrow -3 + D = 0 \Rightarrow D = 3$$

Vậy phương trình của (α) là : $z + 3 = 0$.

Tương tự ta có :

$$(\beta) // (yOz) \Rightarrow (\beta) : x + D = 0$$

$$I \in (\beta) \Rightarrow 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2$$

$$\Rightarrow (\beta) : x - 2 = 0$$

$$(\gamma) // (zOx) \Rightarrow (\gamma) : y + D = 0$$

$$I \in (\gamma) \Rightarrow 6 + D = 0 \Rightarrow D = -6$$

$$\Rightarrow (\gamma) : y - 6 = 0.$$

Bài 6

Lập phương trình tổng quát của các mặt phẳng :

1. Chứa trục Ox và điểm P(4, -1, 2).

2. Chứa trục Oy và điểm Q(1, 4, -3).

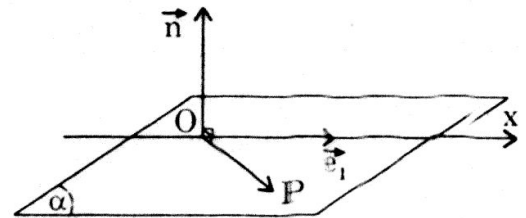
3. Chứa trục Oz và điểm R(3, -4, 7).

Giải

1. (α) có 2 vectơ chỉ phương là :

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$$

$$\vec{OP} = (4, -1, 2)$$



h.3.10

(α) có vectơ pháp tuyến là :

$$\vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{n}_\alpha = (0, -2, -1) \text{ hoặc } \vec{n}'_\alpha = (0, 2, 1)$$

$$\Rightarrow (\alpha) : 2y + z + D = 0$$

$$O(0, 0, 0) \in (\alpha) \Rightarrow D = 0$$

$$\text{Vậy : } (\alpha) : 2y + z = 0.$$

2. Tương tự (β) có 2 vectơ chỉ phương là :

$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$$

$$\vec{OQ} = (1, 4, -3)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\beta = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{n}_\beta = (-3, 0, -1) \text{ hoặc } \vec{n}'_\beta = (3, 0, 1)$$

$$\Rightarrow (\beta) : 3x + z = 0.$$

3. (γ) có 2 vectơ chỉ phương là :

$$\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

$$\vec{OR} = (3, -4, 7)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 7 & 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_\gamma = (4, 3, 0)$$

$$\Rightarrow (\gamma) : 4x + 3y = 0$$

CHÚ Ý : Nếu mặt phẳng (α) chứa điểm $O(0, 0, 0)$ thì phương trình tổng quát của (α) có dạng :

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Bài 7

Cho hình tứ diện có các đỉnh là : $A(5, 1, 3)$, $B(1, 6, 2)$, $C(5, 0, 4)$, $D(4, 0, 6)$.

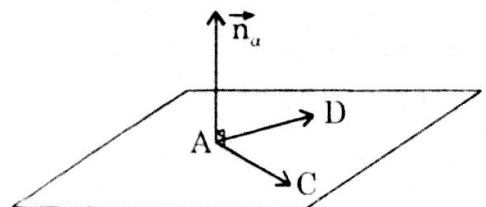
1. Hãy lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của mặt phẳng (ACD) .
2. Hãy lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và song song với cạnh CD .

Giải

1. (ACD) có 2 vectơ chỉ phương là :

$$\vec{AC} = (0, -1, 1)$$

$$\vec{AD} = (-1, -1, 3)$$



h.3.11

(ACD) có vectơ pháp tuyến là :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = (-2, -1, -1) \quad \text{hay} \quad \vec{n}' = (2, 1, 1)$$

Phương trình tổng quát của (ACD) là :

$$2x + y + z + D = 0$$

$$A \in (ACD) \Rightarrow 10 + 1 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -14$$

Vậy $(ACD) : 2x + y + z - 14 = 0.$

2. (α) có 2 vectơ chỉ phương là :

$$\vec{AB} = (-4, 5, -1)$$

$$\vec{CD} = (-1, 0, 2)$$

(α) có vectơ pháp tuyến là :

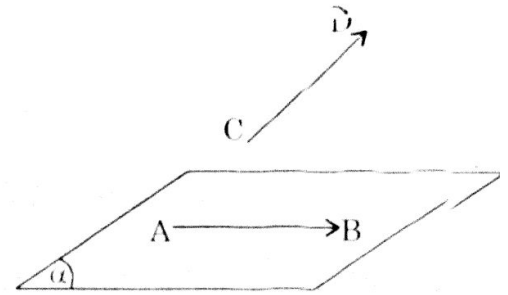
$$\vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) \quad h.3.12$$

$$\vec{n}_\alpha = (10, 9, 5)$$

$$\Rightarrow (\alpha) : 10x + 9y + 5z + D = 0$$

$$A \in (\alpha) \Rightarrow 50 + 9 + 15 + D = 0 \Rightarrow D = -74$$

$$\Rightarrow (\alpha) : 10x + 9y + 5z - 74 = 0.$$



Bài 8 Lập phương trình tổng quát của :

1. Mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2, 1, -1)$ và vuông góc với đường thẳng xác định bởi hai điểm $B(-1, 0, 4)$, $C(0, -2, -1)$.
2. Mặt phẳng (β) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB với $A(1, 3, -4)$ và $B(-1, 2, 2)$.
3. Mặt phẳng (γ) nhận điểm $M(2, -1, -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ ở trên mặt phẳng đó.

Giải

$$1. \text{ Ta có : } \vec{n}_\alpha = \vec{BC} = (1, -2, -5)$$

$$\Rightarrow (\alpha) : x - 2y - 5z + D = 0$$

$$A \in (\alpha) \Rightarrow 2 - 2 + 5 + D = 0$$

$$\Rightarrow D = -5$$

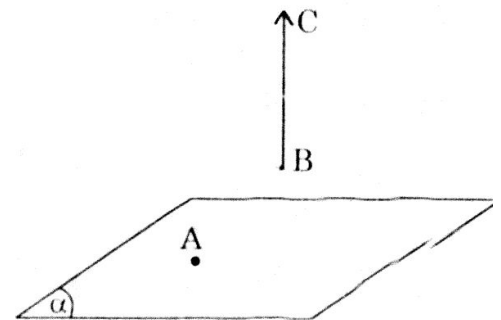
$$\text{Vậy : } (\alpha) : x - 2y - 5z - 5 = 0.$$

$$2. \text{ Ta có : } \vec{n}_\beta = \vec{AB} = (-2, -1, 6)$$

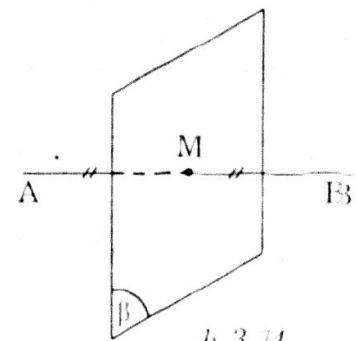
$$\Rightarrow (\beta) : -2x - y + 6z + D = 0$$

Gọi M là trung điểm của AB ta có :

$$M\left(0, \frac{5}{2}, -1\right)$$



h.3.13



h.3.14

$$M \in (\alpha) \Rightarrow \frac{5}{2} - 6 + D = 0 \Rightarrow D = \frac{17}{2}$$

$$\Rightarrow (\beta): 2x - x^2 + 6z + \frac{17}{2} = 0$$

Hay $(\beta): 4x + 2y - 12z - 17 = 0.$

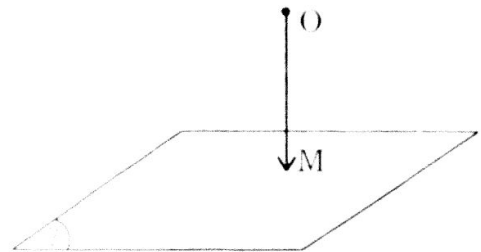
3. Ta có: $\vec{n}_\gamma = \vec{OM} = (2, -1, -2)$

$$\Rightarrow (\gamma): 2x - y - 2z + D = 0$$

$$M \in (\gamma) \Rightarrow -4 + 1 + 4 + D = 0$$

$$\Rightarrow D = -9$$

$$\Rightarrow (\gamma): 2x - y - 2z - 9 = 0.$$



h.3.15

Bài 9

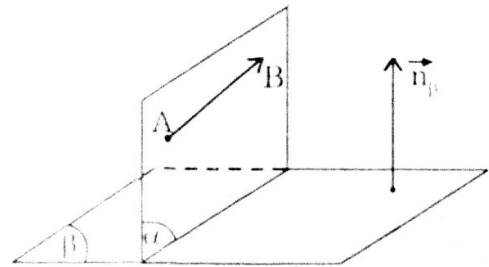
Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(2, -1, 4)$, $B(3, 2, -1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x + y + 2z - 3 = 0$.

Giải

(α) có 2 vectơ chỉ phương là:

$$\vec{AB} = (1, 3, -5)$$

$$\vec{n}_\beta = (1, 1, 2)$$



h.3.16

(α) có vectơ pháp tuyến là:

$$\vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (11, -7, -2)$$

$$\Rightarrow (\alpha): 11x - 7y - 2z + D = 0$$

$$A \in (\alpha) \Rightarrow 22 + 7 - 8 + D = 0 \Rightarrow D = -21$$

Vậy phương trình tổng quát của (α) là: $11x - 7y - 2z - 21 = 0$.

$$\text{Phương trình tham số của } (\alpha) \text{ là: } \begin{cases} x = 2 + m + n \\ y = -1 + 3m + n \\ z = 4 - 5m + 2n \end{cases}$$

Bài 10

Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(3, -1, -5)$ đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng:

$$(\beta): 3x - 2y + 2z + 7 = 0;$$

$$(\gamma): 5x - 4y + 3z + 1 = 0.$$

Giải

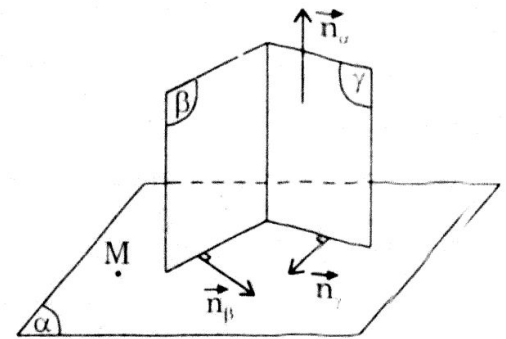
(α) có 2 vectơ chỉ phương là :

$$\vec{n}_\beta = (3, -2, 2)$$

$$\vec{n}_\gamma = (5, -4, 3)$$

Phương trình tham số của (α) :

$$\begin{cases} x = 3 + 3m + 5n \\ y = -1 - 2m - 4n \\ z = -5 + 2m + 3n \end{cases}$$



h.3.17

(α) có vectơ pháp tuyến là :

$$\vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \right) = (2, 1, -2)$$

$$\Rightarrow (\alpha) : 2x + y - 2z + D = 0$$

$$M \in (\alpha) \Rightarrow 6 - 1 + 10 + D = 0 \Rightarrow D = -15$$

Vậy phương trình tổng quát của (α) là : $2x + y - 2z - 15 = 0$.

Bài 11 Trong không gian Oxyz cho hai mặt phẳng :

$$(\alpha) : x + y + 5z - 1 = 0$$

$$(\beta) : 2x + 3y - z + 2 = 0$$

và điểm $M(3, 2, 1)$.

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (γ) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) và đi qua điểm M.

Giải

(γ) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi hai mặt phẳng (α) và (β) nên phương trình (γ) có dạng :

$$m(x + y + 5z - 1) + n(2x + 3y - z + 2) = 0$$

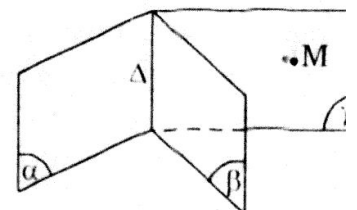
$$M(3, 2, 1) \in (\gamma)$$

$$\Rightarrow m(3 + 2 + 5 - 1) + n(6 + 6 - 1 + 2) = 0 \Rightarrow 9m + 13n = 0$$

$$\text{Cho } m = -13 \Rightarrow n = 9$$

$$\Rightarrow (\gamma) : -13(x + y + 5z - 1) + 9(2x + 3y - z + 2) = 0$$

Vậy phương trình tổng quát của (γ) là : $5x + 14y - 74z + 31 = 0$.



h.3.18

Bài 12 Trong không gian Oxyz cho hai mặt phẳng có phương trình :

$$(\alpha) : x + 3y + 5z - 4 = 0$$

$$(\beta) : x - y - 2z + 7 = 0$$

Lập phương trình của mặt phẳng (γ) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng trên và song song với trục Oy.

Giải

(γ) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi hai mặt phẳng (α) và (β) nên phương trình (γ) có dạng :

$$(\gamma) : m(\alpha) + n(\beta) = 0$$

$$\Leftrightarrow m(x + 3y + 5z - 4) + n(x - y - 2z + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + n)x + (3m - n)y + (5m - 2n)z - 4m + 7n = 0$$

Ta có : $\vec{n}_{\gamma} = (m + n, 3m - n, 5m - 2n)$

và $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$

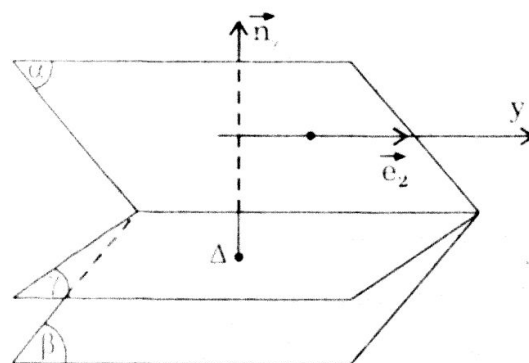
Vậy : $(\gamma) // Oy \Rightarrow \vec{n}_{\gamma} \cdot \vec{e}_2 = 0$

$$\Rightarrow 3m - n = 0$$

Cho $n = 3 \Rightarrow m = 1$

Vậy phương trình tổng quát của mặt phẳng (γ) là :

$$4x - z + 17 = 0.$$



h.3.19

Bài 13 Xác định các giá trị của l và m để các cặp mặt phẳng sau đây song song với nhau :

1. $2x + ly + 3z - 5 = 0$ và $mx - 6y - 6z - 2 = 0.$

2. $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và $2x + ly - 3z + 1 = 0.$

3. $mx + 3y - 2z - 1 = 0$ và $2x - 5y - lz = 0.$

Giải

1. Ta có :
$$\begin{cases} (\alpha) : 2x + ly + 3z - 5 = 0 \\ (\beta) : mx - 6y - 6z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{2}{m} = \frac{l}{-6} = \frac{3}{-6} = \frac{-5}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ l = 3 \end{cases}$$

2. Ta có :
$$\begin{cases} (\alpha) : 3x - 5y + mz - 3 = 0 \\ (\beta) : 2x + ly - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{-5}{l} = \frac{m}{-3} \neq \frac{-3}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} l = -\frac{10}{3} \\ m = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

3. Ta có :
$$\begin{cases} (\alpha) : mx + 3y - 2z - 1 = 0 \\ (\beta) : 2x - 5y - lz = 0 \end{cases}$$

$$(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{2}{m} = \frac{-5}{3} = \frac{-l}{-2} \neq \frac{0}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{6}{-5} \\ l = \frac{-10}{3} \end{cases}$$

Bài 14 Hãy xác định giá trị của m để các cặp mặt phẳng sau đây vuông góc với nhau :

1. $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và $x + 3y + 2z + 5 = 0$.

2. $5x + y - 3z - 2 = 0$ và $2x + my - 3z + 1 = 0$.

3. $7x + 2y - 9 = 0$ và $mx + y - 3z - 1 = 0$.

Giải

1. Ta có :
$$\begin{cases} (\alpha) : 3x - 5y + mz - 3 = 0 \\ (\beta) : x + 3y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\alpha) \perp (\beta) &\Leftrightarrow (3).(1) + (-5).(3) + (m).(2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 - 15 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 6. \end{aligned}$$

2. Ta có :
$$\begin{cases} (\alpha) : 5x + y - 3z - 2 = 0 \\ (\beta) : 2x + my - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\alpha) \perp (\beta) &\Leftrightarrow (5).(2) + (1).(m) + (-3).(-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 10 + m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -19. \end{aligned}$$

3. Ta có :
$$\begin{cases} (\alpha) : 7x - 2y - 9 = 0 \\ (\beta) : mx + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\alpha) \perp (\beta) &\Leftrightarrow (7).(m) + (-2).(1) + (0).(-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 7m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

Bài 15 Tìm góc giữa hai mặt phẳng sau :

1. $2x - y - 2z - 9 = 0$ và $x - y - 6 = 0$.

2. $8x - 4y - 8z + 1 = 0$ và $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 7 = 0$.

Giải

1. Ta có :

$$\begin{cases} (\alpha) : 2x - y - 2z - 9 = 0 \\ (\beta) : x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = (2, -1, -2)$$

$$\vec{n}_\beta = (1, -1, 0)$$

$$\cos(\widehat{\alpha, \beta}) = \cos(\widehat{\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta})$$

$$= \frac{|(2).(1) + (-1).(-1) + (-2).(0)|}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+1+0}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{\pi}{4}.$$

Vậy góc nhọn (α) và (β) là $\frac{\pi}{4}$.

2. Ta có :

$$\begin{cases} (\alpha) : 8x - 4y - 8z + 1 = 0 \\ (\beta) : \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = (8, -4, -8)$$

$$\vec{n}_\beta = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$$

$$\cos(\widehat{\alpha, \beta}) = |\cos(\widehat{\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta})|$$

$$= \frac{|(8).(\sqrt{2}) + (-4).(-\sqrt{2}) + (-8).(0)|}{\sqrt{64+16+64}\sqrt{2+2+0}} = \frac{12\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{\pi}{4}$$

Vậy góc nhọn giữa (α) và (β) là $\frac{\pi}{4}$.

Bài 16 Trong không gian Oxyz tìm điểm B đối xứng của điểm A(1, 1, 1) qua mặt phẳng (α) có phương trình : $x + y - 2z - 6 = 0$.

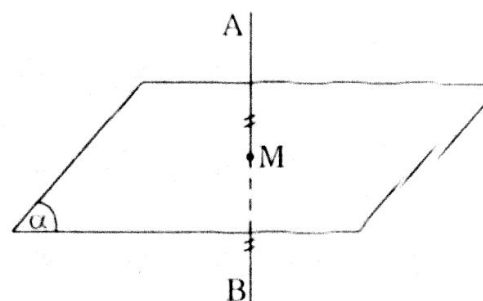
Giải

Ta có : $\vec{n}_\alpha = (1, 1, -2)$

$$\vec{AB} = (x - 1, y - 1, z - 1)$$

Gọi M là trung điểm của đoạn AB, ta có :

$$M\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z+1}{2}\right)$$



h.3.20

$B(x, y, z)$ là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (α)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AB} // \vec{n} \\ M \in \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2} \\ \left(\frac{x+1}{2}\right) + \left(\frac{y+1}{2}\right) - 2\left(\frac{z+1}{2}\right) - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = -3 \end{cases}$$

Vậy $B(3, 3, -3)$ là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (α) .

BÀI TẬP

1. Lập phương trình tham số của mặt phẳng (α)

a) Đi qua điểm $M_0(4, 5, 2)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-3, 2, 4)$, $\vec{b} = (2, 5, -3)$.

b) Đi qua ba điểm không thẳng hàng $A(5, -3, 4)$, $B(2, -4, 1)$, $C(-4, 1, -6)$.

2. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α)

a) Đi qua điểm $M(1, 6, -2)$ và vuông góc với đường thẳng d đi qua hai điểm $A(2, -5, 6)$, $B(-1, -3, 2)$.

b) Đi qua điểm $M(2, -3, 4)$ và song song với mặt phẳng :

$$(\beta) : 4x - 3y + 2z - 5 = 0.$$

3. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng trung trực của đoạn AB với $A(1, -4, 2)$, $B(7, 1, -5)$.

4. Tìm điểm M đối xứng với điểm $N(2, -1, 3)$ qua mặt phẳng :

$$(\alpha) : 2x - y - 2z - 5 = 0.$$

5. Tìm góc giữa hai mặt phẳng $(\alpha) : x + y + 1 = 0$ và $(\beta) : x + z - 3 = 0$.

HƯỚNG DẪN ĐÁP SỐ

1. a) $(\alpha) \begin{cases} x = 4 - 3m + 2n \\ y = 5 + 2m + 5n \\ z = 2 + 4m - 3n \end{cases}$

b) $(\alpha) \begin{cases} x = 5 - 3m - 9n \\ y = 3 - m + 4n \\ z = 4 - 3m - 10n \end{cases}$

2. a) $\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{AB}$.

b) $(\alpha) : 4x - 3y + 2z - 25 = 0$.

$(\alpha) : 3x - 2y + 4z + 17 = 0$.

3. $(\alpha) : 6x + 5y - 7z - 27 = 0$.

4. $M\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

5. $(\widehat{\alpha, \beta}) = 60^\circ$.

ĐƯỜNG THẲNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Phương trình tham số của đường thẳng (d)** đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và nhận $\vec{a}_d = (a_1, a_2, a_3)$ làm vectơ chỉ phương là :

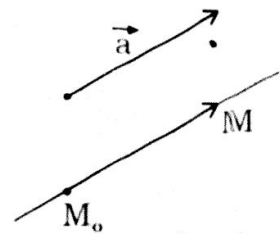
$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$

(Trong đó t là tham số).

2. **Phương trình chính tắc của đường thẳng (d)**

đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và nhận $\vec{a}_d = (a_1, a_2, a_3)$ làm vectơ chỉ phương là :

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$



h.4.1

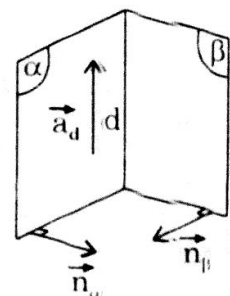
Chú ý : $a_1, a_2, a_3 \neq 0$.

3. **Phương trình tổng quát của đường thẳng (d)** với $(d) = (\alpha) \cap (\beta)$ là :

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\alpha) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\beta) \end{cases}$$

Chú ý : a) $\vec{n}_\alpha \neq k \vec{n}_\beta \quad \forall k \in \mathbb{R}$

b)
$$\begin{cases} \vec{a}_d \perp \vec{n}_\alpha \\ \vec{a}_d \perp \vec{n}_\beta \end{cases}$$



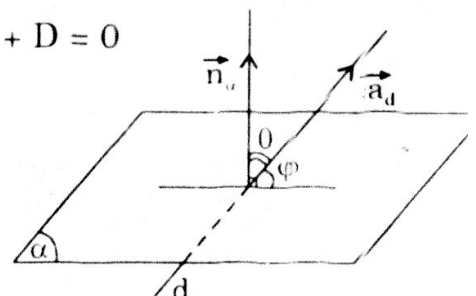
h.4.2

4. **Góc giữa đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương :**

$\vec{a}_d = (a_1, a_2, a_3)$ và mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$

$$\sin(\widehat{d, \alpha}) = |\cos(\widehat{\vec{a}_d, \vec{n}_\alpha})|$$

$$\sin(\widehat{d, \alpha}) = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$



h.4.3

5. Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ được tính theo công thức :

$$d(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

§1. LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Để lập phương trình tham số của một đường thẳng (d) ta thực hiện các bước :

Bước 1 : Xác định một điểm cố định $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thuộc (d).

Bước 2 : Xác định vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ của (d).

Bước 3 : Viết phương trình của (d) :

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 & (1) \\ y = y_0 + ta_2 & (2) \\ z = z_0 + ta_3 & (3) \end{cases}$$

2. Nếu $a_1, a_2, a_3 \neq 0$, khử tham số t từ phương trình tham số ta được phương trình chính tắc :

$$(d) : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

3. Để lập phương trình tổng quát của đường thẳng (d) ta thực hiện các bước :

Bước 1 : Xác định 2 mặt phẳng (α) và (β) sao cho : $\begin{cases} (\alpha) \supset d \\ (\beta) \supset d \end{cases}$

Bước 2 : Phương trình tổng quát của (d) chính là một hệ gồm hai phương trình tổng quát của 2 mặt phẳng (α) và (β) :

$$(d) : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\alpha) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\beta) \end{cases}$$

CHÚ Ý :

- a) Phương trình chính tắc của đường thẳng (d) có thể xem như một dạng đặc biệt của phương trình tổng quát :

$$(d) : \begin{cases} \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} & (\alpha) \\ \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{z - z_0}{a_3} & (\beta) \end{cases}$$

b) Từ phương trình tổng quát của đường thẳng (d) có thể lập phương trình tham số bằng cách cho $x = t$, thay vào (α) và (β) tìm y và z theo t .

c) Đường thẳng (d) :
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

có vectơ chỉ phương là : $\vec{a} : \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$.

BÀI TẬP

Bài 1 Lập phương trình tham số, phương trình chính tắc và phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(2, 0, -3)$ và nhận $\vec{a} = (2, -3, 5)$ làm vectơ chỉ phương.

Giải

Phương trình tham số của đường thẳng (d) là :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$$

Phương trình chính tắc của đường thẳng (d) là :

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z + 3}{5}$$

Phương trình tổng quát của đường thẳng (d) là :

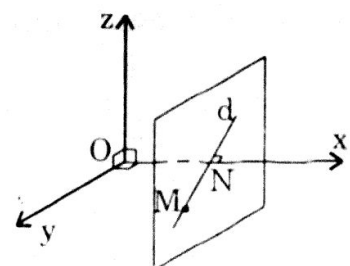
$$\begin{cases} \frac{x - 2}{2} = \frac{y}{-3} \\ \frac{x - 2}{2} = \frac{z + 3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 & (\alpha) \\ 5x - 2z - 16 = 0 & (\beta) \end{cases}$$

Bài 2 Trong không gian Oxyz, lập phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua điểm $M(3, 2, -1)$, cắt trục Ox và vuông góc với trục Oz.

Giải

(d) đi qua $M(3, 2, -1)$, và vuông góc với trục Oz tại N nên ta có $N(3, 0, 0) \Rightarrow$ (d) có vectơ chỉ phương là :

$$\vec{a}_d = \vec{MN} = (0, -2, 1)$$



h.4.4

Phương trình tham số của (d) là :
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Bài 3

Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng (d) đi qua điểm A(2, 0, -3) và vuông góc với mặt phẳng (c) : $2x - 3y + 5z - 4 = 0$.

Giải

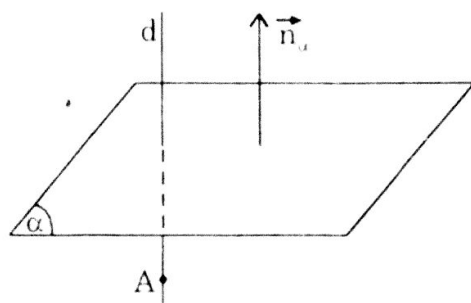
Ta có : $d \perp \alpha$

Phương trình tham số của (d) là :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$$

Phương trình tổng quát của (d) là :

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} \\ \frac{x-2}{2} = \frac{z+3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ 5x - 2z - 16 = 0 \end{cases}$$



h.4.5

Bài 4

Lập phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm M(-2, 6, -3) và :

1. song song với đường thẳng :
$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

2. lần lượt song song với các trục Ox, Oy, Oz.

Giải

1. Gọi (Δ) là đường thẳng có phương trình :
$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

(d) // (Δ) $\Rightarrow \vec{a}_d = \vec{a}_\Delta = (5, 2, -1)$

Vậy phương trình tham số của (d) là :
$$\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 6 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

$$2. * (d) // Ox \Rightarrow \vec{a_d} = \vec{e_1} = (1, 0, 0)$$

$$\text{Vậy phương trình tham số của (d) là : } \begin{cases} x = -2t + t \\ y = 6 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$* (d) // Oy \Rightarrow \vec{a_d} = \vec{e_2} = (0, 1, 0)$$

$$\text{Phương trình tham số của (d) là : } \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 + t \\ z = -3 \end{cases}$$

$$* (d) // Oz \Rightarrow \vec{a_d} = \vec{e_3} = (0, 0, 1)$$

$$\text{Phương trình tham số của (d) là : } \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \\ z = -3 + t \end{cases}$$

Bài 5

Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng :

1. Đi qua hai điểm A(1, 0, -3), B(3, -1, 0);

2. Đi qua điểm M(2, 3, -5) và song song với đường thẳng :

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Giải

$$1. \text{ Ta có : } \vec{a_{AB}} = \vec{AB} = (2, -1, 3)$$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng AB là :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t & (1) \\ y = -t & (2) \\ z = -3 + 3t & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow t = -y$$

$$(1) \text{ và } (2) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ z = -3 - 3y \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng AB là : } \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

2. Ta có phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ) :

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 & (\alpha) \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 & (\beta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{\alpha} = (3, -1, 2)$$

$$\vec{n}_{\beta} = (1, 3, -2)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{\Delta} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-4, 8, 10)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{\Delta} = (2, -4, -5)$$

$$(d) // (\Delta) \Rightarrow \vec{a}_d = \vec{n}_{\Delta} = (2, -4, -5)$$

Ta lại có : $M(2, 3, -5) \in (d)$

$$\text{Vậy phương trình tham số của đường thẳng (d) là : } \begin{cases} x = 2 + 2t & (1) \\ y = 3 - 4t & (2) \\ z = -5 - 5t & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow t = \frac{x-2}{2}$$

$$(2) \text{ và } (3) \text{ cho : } \begin{cases} y = 3 - 4\left(\frac{x-2}{2}\right) \\ z = -5 - 5\left(\frac{x-2}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ 5x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng (d) là : } \begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ 5x + 2z = 0 \end{cases}$$

GHI CHÚ : Đến §3 ta sẽ xét chi tiết tất cả các vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian.

Bài 6

Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng :

1. đi qua điểm $M(2, -3, -5)$ và vuông góc với mặt phẳng :

$$(\alpha) : 6x - 3y - 5z + 2 = 0.$$

2. đi qua điểm $N(1, 4, -2)$ và song song với các mặt phẳng :

$$(\gamma) : 6x + 2y + 2z + 3 = 0;$$

$$(\beta) : 3x - 5y - 2z - 1 = 0.$$

Giải

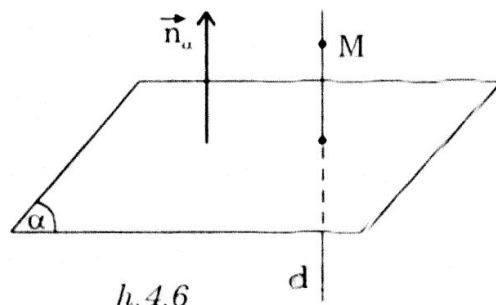
1. $(d) \perp (\alpha) \Rightarrow \vec{a}_d = \vec{n}_\alpha = (6, -3, -5)$

Phương trình tham số của (d) là :

$$\begin{cases} x = 2 + 6t & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3 - 3t & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -5 - 5t & (3) \end{cases}$$



h.4.6

Phương trình tổng quát của (d) là :

$$\begin{cases} \frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} \\ \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{cases}$$

2. $\begin{cases} (d) // (\gamma) \\ (d) // (\beta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_d \perp \vec{n}_\gamma \\ \vec{a}_d \perp \vec{n}_\beta \end{cases}$

Ta có : $\begin{cases} \vec{n}_\gamma = (6, 2, 2) \\ \vec{n}_\beta = (3, -5, -2) \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{a}_d = \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \right) = (6, 18, -36)$$

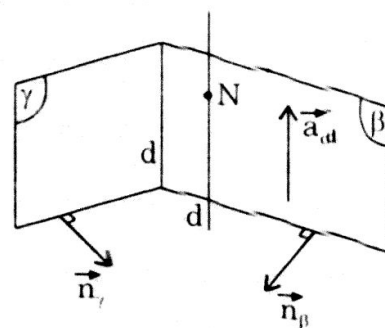
$$\Rightarrow \vec{a}_d = (1, 3, -6)$$

Ta lại có : $N(1, 4, -2) \in (d)$

Vậy phương trình tham số của (d) là : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + 3t \\ z = -2 - 6t \end{cases}$

Phương trình tổng quát của (d) là :

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{3} \\ \frac{x-1}{1} = \frac{z+2}{-6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ 6x + z - 4 = 0 \end{cases}$$



h.4.7

GHI CHÚ : Đến §2 ta sẽ xét chi tiết vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.

Bài 7

Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2, 3, 1)$ và cắt hai đường thẳng (a), (b) lần lượt có phương trình là

$$(a) \begin{cases} x + y = 0 & (\alpha_1) \\ x - y + z + 4 = 0 & (\alpha_2) \end{cases} \quad ; \quad (b) \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 & (\beta_1) \\ y + z - 2 = 0 & (\beta_2) \end{cases}$$

Giai

Gọi (α) là mặt phẳng chứa (a) và M,
 (β) là mặt phẳng chứa (b) và M.

Ta có : $\alpha \cap \beta = (d)$

(α) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi (α_1) và (α_2) nên phương trình của (α) có dạng :

$$m(x + y) + n(x - y + z + 4) = 0$$

$$\begin{aligned} M(2, 3, 1) \in (\alpha) &\Rightarrow m(2 + 3) + n(2 - 3 + 1 + 4) = 0 \\ &\Rightarrow 5m + 4n = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Cho } m = -4 \Rightarrow n = 5$$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình của } (\alpha) \text{ là : } &-4(x + y) + 5(x - y + z + 4) = 0 \\ \Leftrightarrow &x - 9y + 5z + 20 = 0 \end{aligned}$$

Tương tự ta có (β) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi (β_1) và (β_2) nên phương trình của (β) có dạng :

$$m(x + 3y - 1) + n(y + z - 2) = 0$$

$$\begin{aligned} M(2, 3, 1) \in (\beta) &\Rightarrow m(2 + 9 - 1) + n(3 + 1 - 2) = 0 \\ &\Rightarrow 10m + 2n = 0 \Rightarrow 5m + n = 0 \end{aligned}$$

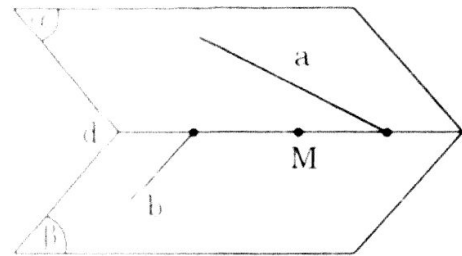
$$\bullet \text{ Cho } m = 1 \Rightarrow n = -5$$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình của } (\beta) \text{ có dạng : } &(x + 3y - 1) - 5(y + z - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow &x - 2y - 5z + 9 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy phương trình của } (d) \text{ là : } (d) \begin{cases} x - 9y + 5z + 20 = 0 & (\alpha) \\ x - 2y - 5z + 9 = 0 & (\beta) \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } \vec{a}_d = \left(\begin{vmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (55, 10, 7)$$

$$\vec{a}_a = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1, -1, -2)$$



h.4.8

$$\vec{a}_b = \left(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (3, -1, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_d \neq k \vec{a}_a \\ \vec{a}_d \neq k \vec{a}_b \end{cases}$$

Vậy (d) chính là đường thẳng qua M cắt (a) và cắt (b).

Bài 8 Lập phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $A(3, -1, -4)$, cắt trục Oy và song song với mặt phẳng $2x + y = 0$.

Giải

Gọi (α) là mặt phẳng qua A và song song với mặt phẳng :

$$2x + y = 0$$

Ta có : (α) : $2x + y + D = 0$

$$A \in (\alpha) \Rightarrow 6 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = -5$$

Vậy phương trình tổng quát của (α) là : $2x + y - 5 = 0$.

Gọi (β) là mặt phẳng chứa A và Oy. Phương trình (β) có dạng :

$$mx + nz = 0$$

$$A(3, -1, -4) \in (\beta) \Rightarrow 3m - 4n = 0$$

$$\text{Cho } m = 4 \Rightarrow n = 3$$

Phương trình tổng quát của (β) là : $4x + 3y = 0$.

Ta có : (α) $\cap$ (β) = (Δ)

$$\text{Vậy phương trình tổng quát của } (\Delta) \text{ là : } \begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$$

§2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẺNG VÀ MẶT PHẺNG

I. Cho đường thẳng : (d) $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$

và mặt phẳng (α) : $Ax + By + Cz + D = 0$

Số giao điểm của (d) và (α) chính là số nghiệm t của phương trình :

$$A(x_0 + ta_1) + B(y_0 + ta_2) + C(z_0 + ta_3) + D = 0 \quad (1)$$

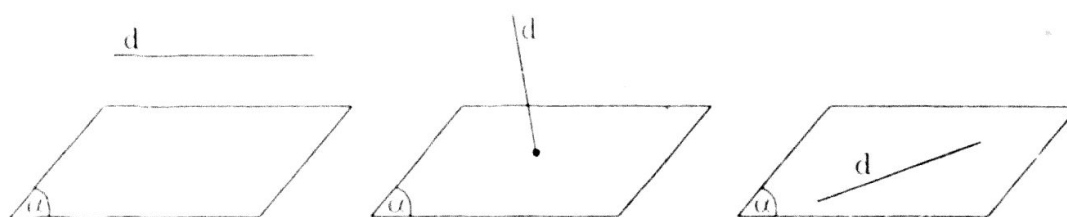
Ta có các trường hợp sau đây :

(1) Vô nghiệm $\Leftrightarrow (d) // (\alpha)$

(1) Có 1 nghiệm $t_M \Leftrightarrow (d)$ cắt (α) tại điểm M có tọa độ :

$$\begin{cases} x_M = x_0 + t_M a_1 \\ y_M = y_0 + t_M a_2 \\ z_M = z_0 + t_M a_3 \end{cases}$$

(1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow (d) \subset (\alpha)$



h.4.9

2. **Góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (α)** được suy ra từ góc giữa vectơ chỉ phương của (d) và vectơ pháp tuyến của (α) :

$$\sin(\widehat{d, \alpha}) = |\cos(\widehat{\vec{a}_d, \vec{n}_\alpha})| = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

3. $d \perp \alpha \Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$.

BÀI TẬP

Bài 1

Xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau :

$$1. (d) \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases} ; \quad (\alpha) : 3x + 5y - z - 2 = 0.$$

$$2. (d) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ; \quad (\alpha) : x + 3y + z + 1 = 0.$$

$$3. (d) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases} ; \quad (\alpha) : x + y + z - 4 = 0.$$

Giải

1. Xét phương trình : $3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0$ (

$$(1) \Leftrightarrow 26t + 78 = 0 \Leftrightarrow t = -3$$

(1) có nghiệm duy nhất $t_M = -3$

Vậy (d) cắt (α) tại điểm M
$$\begin{cases} x_M = 12 - 12 = 0 \\ y_M = 9 - 9 = 0 \\ z_M = 1 - 3 = -2 \end{cases}$$

Vậy ta có : $M(0, 0, -2)$.

2. Xét phương trình : $(1 + t) + 3(2 - t) + (1 + 2t) + 1 = 0$ (

$$(1) \Leftrightarrow 0t + 9 = 0$$

(1) vô nghiệm. Vậy (d) // (α).

3. Xét phương trình : $(1 + t) + (1 + 2t) + (2 - 3t) - 4 = 0$ (

$$(1) \Leftrightarrow 0t = 0$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ đều là nghiệm của (1). Vậy : (d) $\subset$ (α).

Bài 2

Xét vị trí tương đối của đường thẳng : (d) $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 10 = 0 \\ x + y + z + 5 = 0 \end{cases}$

và mặt phẳng (α) : $y + 4z + 17 = 0$.

Giải

Ta viết phương trình tham số của (d).

$$\text{Cho } x = t \Rightarrow y = -\frac{40}{3} - \frac{4t}{3}, \quad z = \frac{25}{3} + \frac{1}{3}t$$

Thay vào (α) ta được : $\left(-\frac{40}{3} - \frac{4t}{3}\right) + 4\left(\frac{25}{3} + \frac{1}{3}t\right) + 17 = 0$ (

$$\Leftrightarrow 0t = \frac{111}{3}$$

(1) vô nghiệm. Vậy (d) // (α).

Bài 3

Tìm góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau :

1. (d) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 \\ z = 1 + t \end{cases}$; (α) : $y - z = 0$.

2. (d) $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0 \\ 2x - y + 3z + 13 = 0 \end{cases}$; (α) : $3x - 2y + 3z + 15 = 0$

Giải

1. Ta có : $\vec{a}_d = (-1, 0, 1)$

$$\vec{n}_\alpha = (0, 1, -1)$$

$$\sin(\widehat{d, \alpha}) = |\cos(\widehat{\vec{a}_d, \vec{n}_\alpha})| = \frac{|(-1) \cdot (0) + (0) \cdot (1) + (1) \cdot (-1)|}{\sqrt{1+0+1}\sqrt{0+1+1}} = \frac{1}{2}$$

Vậy : $(\widehat{d, \alpha}) = \frac{\pi}{6}$

2. Ta có : $\vec{a}_d = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (5, -5, -5)$

$$\vec{a}'_d = (1, -1, -1)$$

$$\vec{n}_\alpha = (3, -2, 3)$$

$$\begin{aligned} \sin(\widehat{d, \alpha}) &= |\cos(\widehat{\vec{a}'_d, \vec{n}_\alpha})| \\ &= \frac{|(1) \cdot (3) + (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot (3)|}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{9+4+9}} = \frac{2}{\sqrt{66}} = \frac{\sqrt{66}}{33} \end{aligned}$$

Vậy : $(\widehat{d, \alpha}) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{66}}{33}\right)$

Bài 4

Cho đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d) \begin{cases} 2x - y + z - 6 = 0 \\ x + 4y - 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

1. Gọi M là giao điểm của đường thẳng (d) với mặt phẳng (α) có phương trình : $x + y - z + 12 = 0$. Hãy tìm tọa độ của M.

2. Tìm góc hợp bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (α).

Giải

1. Phương trình tham số của (d) :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 10 - \frac{5}{2}t \\ z = 16 - \frac{9}{2}t \end{cases}$$

Xét phương trình : $t + \left(10 - \frac{5}{2}t\right) - \left(16 - \frac{9}{2}t\right) + 12 = 0 \Leftrightarrow t = -2$

Thay vào phương trình tham số của (d) ta được :

$$\begin{cases} x_M = (-2) \\ y_M = 10 - \frac{5}{2}(-2) \\ z_M = 16 - \frac{9}{2}(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -2 \\ y_M = 15 \\ z_M = 25 \end{cases}$$

Vậy (d) cắt (α) tại điểm $M(-2, 15, 25)$.

2. Ta có : $\vec{a}_d = \left(1, -\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

$\vec{a}'_d = (-2, 5, 9)$

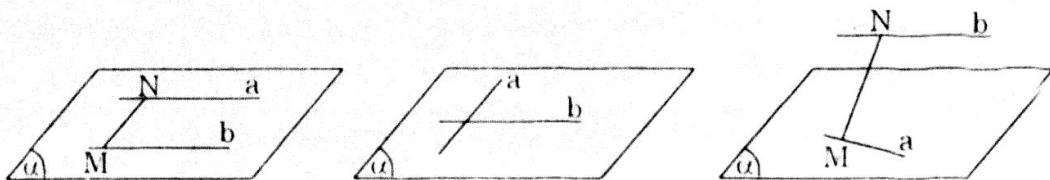
$\vec{n}_\alpha = (1, 1, -1)$

$$\begin{aligned} \sin(\widehat{d, \alpha}) &= |\cos(\widehat{\vec{a}'_d, \vec{n}_\alpha})| = \\ &= \frac{|(-2) \cdot (1) + (5) \cdot (1) + (9) \cdot (-1)|}{\sqrt{4 + 25 + 81} \sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{330}} = \frac{\sqrt{330}}{56} \end{aligned}$$

Vậy : $(\widehat{d, \alpha}) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{330}}{56}\right)$.

§3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

I.



h.4.10

Cho đường thẳng a đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

và đường thẳng b đi qua điểm N và có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$(a) \perp (b) \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

$$(a) \text{ cùng phương với } (b) \Leftrightarrow \vec{a} = k \vec{b} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$(a) // (b) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = k \vec{b} \\ a \cap b = \emptyset \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$(a) \text{ chéo } (b) \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{MN} \text{ không đồng phẳng}$$

$$(a) \text{ cắt } (b) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}, \vec{b}, \vec{MN} & \text{đồng phẳng} \\ \vec{a} \neq k \vec{b} & (k \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$(a) \equiv (b) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = k \vec{b} \\ \vec{a} = l \vec{MN} \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{R})$$

2. Xét mặt phẳng (α) chứa đường thẳng (a) và cùng phương với đường thẳng (b) :

$$(a), (b) \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow N \in \alpha$$

$$(a), (b) \text{ chéo nhau} \Leftrightarrow N \notin \alpha$$

3. Góc giữa hai đường thẳng (a) và (b) :

$$\cos(\widehat{a, b}) = |\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})| = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$a \perp b \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

4. Cách tìm giao điểm của hai đường thẳng :

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} ; \quad (d'): \begin{cases} x = x'_0 + t'a'_1 \\ y = y'_0 + t'a'_2 \\ z = z'_0 + t'a'_3 \end{cases}$$

Bước 1 : Giải hệ ba phương trình hai ẩn số t và t' :

$$\begin{cases} x_0 + ta_1 = x'_0 + t'a'_1 & (1) \\ y_0 + ta_2 = y'_0 + t'a'_2 & (2) \\ z_0 + ta_3 = z'_0 + t'a'_3 & (3) \end{cases}$$

Gọi (t_M, t'_M) là nghiệm duy nhất (nếu có) của hệ ba phương trình trên.

Bước 2 : Thay t_M hoặc t'_M vào phương trình tham số của (d) hoặc (d') ta được giao điểm M .

BÀI TẬP

Bài 1 Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây :

$$1. (d): \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases} ; \quad (d') \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 - 4t \\ z = 20 + t \end{cases}$$

$$2. (d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} ; \quad (d') \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

$$3. (d): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases} ; \quad (d') \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Giải

1. Gọi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ là giao điểm (nếu có) của (d) và (d') . Ta có :

$$M_0 \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3 + 2t \\ y_0 = -2 + 3t \\ z_0 = 6 + 4t \end{cases}$$

$$M_0 \in (d') \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 + t' \\ y_0 = -1 - 4t' \\ z_0 = 20 + t' \end{cases}$$

$$(d) \cap (d') = \{M_0\} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 2t = 5 + t' \\ -2 + 3t = -1 - 4t' \\ 6 + 4t = 20 + t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t' = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 7 \\ z_0 = 18 \end{cases}$$

Vậy : (d') cắt (d) .

$$2. \text{ Ta có : } (d) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_d = (1, 1, -1)$$

$$(d') \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_{d'} = (2, 2, -2)$$

$$\vec{a}_{d'} = 2 \vec{a}_d \Rightarrow (d) \text{ và } (d') \text{ cùng phương}$$

Xét điểm $M_0(1, 2, 3) \in (d)$ ta có $M_0 \notin d'$

Vậy : $(d) \nparallel (d')$.

3. Gọi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ là giao điểm nếu có của (d) và (d') . Ta có :

$$M_0 \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 + t \\ y_0 = 2t \\ z_0 = 2 - t \end{cases}$$

$$M_0 \in (d') \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 + 2t' \\ y_0 = 7 + t' \\ z_0 = 3 + 4t' \end{cases}$$

$$(d) \cap (d') = \{M_0\} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + t = 1 + 2t' \\ 2t = 7 + t' \\ 2 - t = 3 + 4t' \end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm.

Ta lại có $\vec{a}_d$ và $\vec{a}_{d'}$ khác phương.

Vậy : (d) và (d') chéo nhau.

Bài 2 Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau :

$$1. (d) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 \end{cases} ; (d') \begin{cases} 3x + 2y - 10 = 0 \\ z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$2. (d) \begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ 2y + z - 1 = 0 \end{cases} ; (d') \begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \\ 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

Giải

1. Gọi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ là giao điểm nếu có của (d) và (d') ta có :

$$M_0 \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 + 2t \\ y_0 = 2 - 2t \\ z_0 = -1 \end{cases}$$

$$M_0 \in (d') \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = t' \\ y_0 = 5 - \frac{3}{2}t' \\ z_0 = 4 \end{cases}$$

$$M_0 \in (d) \cap (d') \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = t' \\ 2 - 2t = 5 - \frac{3}{2}t' \\ -1 = 4 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm.

Ta lại có : $\vec{a}_d = (2, -2, 0); \quad \vec{a}_{d'} = \left(1, -\frac{3}{2}, 0\right)$

$\vec{a}_d$ và $\vec{a}_{d'}$ khác phương.

Vậy hai đường thẳng (d) và (d') chéo nhau.

2. Gọi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ là giao điểm nếu có của (d) và (d'), ta có :

$$M_0 \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 - 3t \\ y_0 = t \\ z_0 = 1 - 2t \end{cases}$$

$$M_0 \in (d') \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 - 3t' \\ y_0 = t' \\ z_0 = 5 - 2t' \end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm.

Ta lại có : $\vec{a}_d = (-3, 1, -2); \quad \vec{a}_{d'} = (-3, 1, -2)$

(d) và (d') không có điểm chung.

Vậy (d) và (d') là hai đường thẳng song song.

Bài 3 Tìm a để cho hai đường thẳng sau đây cắt nhau :

$$(d) \begin{cases} x = 1 + at \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} ; \quad (d') \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Giải

Gọi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ là giao điểm nếu có của (d) và (d').

Ta có :
$$\begin{cases} x_0 = 1 + at = 1 - t' & (1) \\ y_0 = t = 2 + 2t' & (2) \\ z_0 = -1 + 2t = 3 - t' & (3) \end{cases}$$

(2) và (3) cho :
$$\begin{cases} t = 2 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Thay vào (1) ta được : $1 + 2a = 1 - 0 \Leftrightarrow a = 0$

Vậy để (d) và (d') cắt nhau ta phải có $a = 0$, khi đó tọa độ giao điểm là $M_0(1, 2, 3)$.

Bài 4 Tìm góc nhọn hợp bởi hai đường thẳng (d) và (d') trong các trường hợp sau :

$$1. (d) \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - \sqrt{2}t \\ z = -1 + t \end{cases} ; \quad (d') \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 6 + \sqrt{2}t \\ z = 7 - t \end{cases}$$

$$2. (d) \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} ; \quad (d') \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 + 2t \\ z = 6 + t \end{cases}$$

$$3. (d) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + \sqrt{2}t \end{cases} ; \quad (d') \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x\sqrt{2} - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Giải

$$1. \text{ Ta có : } \vec{a}_d = (1, -\sqrt{2}, 1); \quad \vec{a}_{d'} = (1, \sqrt{2}, -1)$$

$$\cos(\widehat{d, d'}) = |\cos(\widehat{\vec{a}_d, \vec{a}_{d'}})| = \frac{|1 - 2 - 1|}{\sqrt{1+2+1}\sqrt{1+2+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\widehat{d, d'}) = \frac{\pi}{3}.$$

$$2. \text{ Ta có : } \vec{a}_d = (0, 3, -1); \quad \vec{a}_{d'} = (0, 2, 1)$$

$$\cos(\widehat{d, d'}) = |\cos(\widehat{\vec{a}_d, \vec{a}_{d'}})| = \frac{|0 + 6 - 1|}{\sqrt{0+9+1}\sqrt{0+4+1}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (\widehat{d, d'}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$3. \text{ Ta có : } \vec{a}_d = (1, -1, \sqrt{2})$$

$$\vec{a}_{d'} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} \right) = (1, 1, \sqrt{2})$$

$$\cos(\widehat{d, d'}) = |\cos(\widehat{\vec{a}_d, \vec{a}_{d'}})| = \frac{|1 - 1 + 2|}{\sqrt{1+1+2}\sqrt{1+1+2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\widehat{d, d'}) = \frac{\pi}{3}.$$

§4. KHOẢNG CÁCH

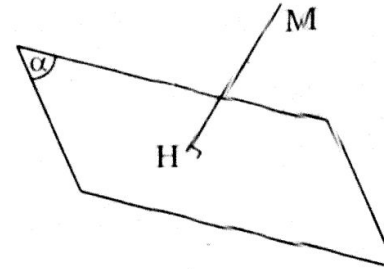
1. Để tìm khoảng cách từ một điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$, ta dùng công thức :

$$d(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

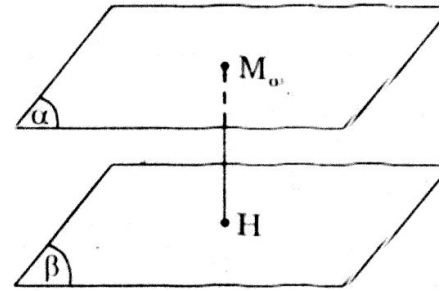
2. Để tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β) ta thực hiện các bước :

Bước 1 : Lấy 1 điểm M_0 nào đó trên α .

Bước 2 : Tính $d(\alpha, \beta) = d(M_0, \beta)$.



h.4.11



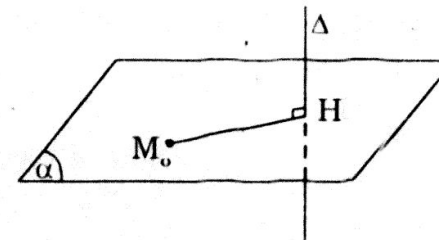
h.4.12

3. Để tìm khoảng cách từ một điểm M_0 đến một đường thẳng Δ ta thực hiện các bước :

Bước 1 : Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa M và vuông góc với Δ .

Bước 2 : Tìm giao điểm H của Δ và (α) .

Bước 3 : $d(M_0, \Delta) = M_0H$.



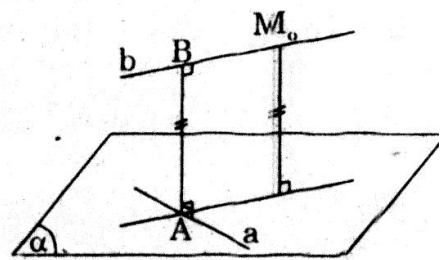
h.4.13

4. Để tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau (a) và (b) ta thực hiện các bước :

Bước 1 : Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa (a) và song song với (b)

Bước 2 : Lấy 1 điểm M_0 nào đó trên (b) .

Bước 3 : Tính $d(a, b) = d(M_0, \alpha)$.



h.4.14

BÀI TẬP

Bài 1 Tìm khoảng cách từ :

- Điểm $A(-2, -4, 3)$ đến mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y + 2z - 3 = 0$.
- Điểm $B(2, -1, -1)$ đến mặt phẳng $(\beta) : 16x - 12y - 15z - 4 = 0$.
- Điểm $C(4, 2, -2)$ đến mặt phẳng $(\gamma) : 12y - 5z + 5 = 0$.

Giải

1. Ta có : $d(A, \alpha) = \frac{|2 \cdot (-2) - (-4) + 2 \cdot (3) - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 1$

2. $d(B, \beta) = \frac{|16 \cdot (2) - 12 \cdot (-1) - 15 \cdot (-1) - 4|}{\sqrt{256 + 144 + 225}} = \frac{11}{5}$

3. $d(C, \gamma) = \frac{|12 \cdot (2) - 5 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{144 + 25}} = 3$

Bài 2

Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song sau đây :

$$(\alpha) : x + y - z + 5 = 0$$

$$(\beta) : 2x + 2y - 2z + 3 = 0$$

Giải

Thay $x_0 = 0, y_0 = 0$ vào phương trình của (α) ta được $z_0 = 5$

Vậy : $M_0(0, 0, 5) \in (\alpha)$.

Ta có : $d(\alpha, \beta) = d(M_0, \beta) = \frac{|0 + 0 - 10 + 3|}{\sqrt{4 + 4 + 4}} = \frac{7}{2\sqrt{3}}$

Vậy : $d(\alpha, \beta) = \frac{7\sqrt{3}}{6}$

Bài 3

Tính khoảng cách từ điểm M_0 đến đường thẳng (Δ) trong các trường hợp sau :

1. $M_0(2, 0, 1)$; $(\Delta) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$

2. $M_0(1, 3, 5)$; $(\Delta) \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ 3x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$

Giải

1. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua $M_0(2, 0, 1)$ và vuông góc với (Δ) . Ta có :

$$\vec{n}_\alpha = \vec{a}_\Delta = (1, 2, 1)$$

$\Rightarrow$ Phương trình tổng quát của (α) có dạng :

$$(\alpha) : x + 2y + z + D = 0$$

$$M_0 \in (\alpha) \Rightarrow 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -3$$

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là : $x + 2y + z - 3 = 0$

Ta tìm giao điểm H của (Δ) và (α)

Thay (Δ) vào (α) ta được : $(1 + t) + 4t + 2 + t - 3 = 0 \Rightarrow t = 0$

Vậy tọa độ của H là :
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Ta có : $d(M_0, \Delta) = M_0H = \sqrt{(1-2)^2 + 0 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$.

2. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua $M_0(1, 3, 5)$ và vuông góc với (Δ) . Ta có :

$$\vec{n}_\alpha = \vec{a}_\Delta = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, -1, -1)$$

Phương trình của (α) có dạng : $x - y - z + D = 0$

$$M_0(1, 3, 5) \in (\alpha) \Leftrightarrow 1 - 3 - 5 + D = 0 \Leftrightarrow D = 7$$

Vậy phương trình của (α) là : $(\alpha) : x - y - z + 7 = 0$

Phương trình tham số của (Δ) : $(\Delta) \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$

Ta tìm giao điểm H của (Δ) và (α)

Xét phương trình : $(t) - (-1 - t) - (2 - t) + 7 = 0 \Leftrightarrow t = -2$

Vậy tọa độ của H là :
$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Ta có : $d(M_0, \Delta) = M_0H = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-3)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{9+4+1}$

Vậy : $d(M_0, \Delta) = \sqrt{14}$.

Bài 4 Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau (a) và (b) trong các trường hợp sau :

$$1. (a) \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases} ; (b) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$$2. (a) \begin{cases} x + y - z + 5 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} ; (b) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Giải

1. Gọi (α) là mặt phẳng chứa (a) và song song với (b). Mặt phẳng (α) có cặp vectơ chỉ phương là :

$$\vec{a} = (1, 2, -1)$$

$$\vec{b} = (2, 1, 4)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (9, -6, -3)$$

$$\Rightarrow \vec{n}'_\alpha = (3, -2, -1)$$

Phương trình (α) có dạng : $3x - 2y - z + D = 0$

$$A(-1, 0, 2) \in (\alpha) \Rightarrow 3(-1) + 0 - (2) + D = 0 \Rightarrow D = 5$$

Xét phương trình tổng quát của (α) : $3x - 2y - z + 5 = 0$

Ta có : $B(1, 7, 3) \in (b)$

$$\Rightarrow d(b, \alpha) = d(B, \alpha) = \frac{|3 \cdot (1) - 2 \cdot (7) - 3 + 5|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{14}} = \frac{9\sqrt{14}}{14}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau (a), (b) là : $\frac{9\sqrt{14}}{14}$.

2. Ta có : (a) $\begin{cases} x + y - z + 5 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$

$$\text{Phương trình tham số của (a) là : } \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa (a) và song song với (b). Ta có hai vectơ chỉ phương của (α) là :

$$\vec{a} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{b} = (1, 1, -1)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-5, 4, -1)$$

Phương trình của (α) có dạng : $-5x + 4y - z + D = 0$

$$A(0, 1, 6) \in (\alpha) \Rightarrow 0 + 4 - 6 + D = 0 \Rightarrow D = 2$$

Phương trình tổng quát của (α) :

$$-5x + 4y - z + 2 = 0 \Leftrightarrow 5x - 4y + z - 2 = 0$$

Ta có : $B(1, -2, 3) \in (b)$

$$\Rightarrow d(b, a) = d(B, \alpha) = \frac{|5 + 8 + 3 - 2|}{\sqrt{25 + 16 + 1}} = \frac{14}{\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau (a) và (b) là : $\frac{\sqrt{42}}{3}$

§5. ĐƯỜNG VUÔNG GÓC CHUNG CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

1. Để chứng minh hai đường thẳng (a) , (b) chéo nhau ta thực hiện các bước :

Bước 1 : Chứng minh $(a) \cap (b) = \emptyset$.

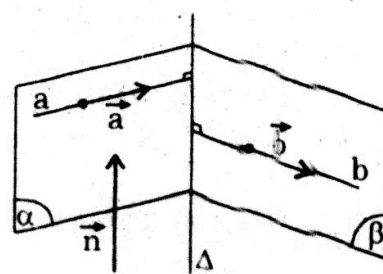
Bước 2 : Xác định các vectơ chỉ phương $\vec{a}$, $\vec{b}$ của hai đường thẳng (a) , (b) .

Bước 3 : Chứng minh $\vec{a} \neq k\vec{b}$.

2. Để lập phương trình đường vuông góc chung (Δ) của hai đường chéo nhau (a) , (b) ta thực hiện các bước :

Bước 1 : Xác định vectơ chỉ phương $\vec{a}$ của đường thẳng (a) và vectơ chỉ phương $\vec{b}$ của đường thẳng (b) .

Bước 2 : Xác định vectơ $\vec{n}$ thỏa :
$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases}$$



h. 4.15

Bước 3 : Lập phương trình của hai mặt phẳng :

(α) chứa (a) và cùng phương với $\vec{n}$

(β) chứa (b) và cùng phương với $\vec{n}$.

Bước 4 : Lập phương trình của $(\Delta) = \alpha \cap \beta$.

BÀI TẬP

Bài 1 :

Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng :

$$(a) \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases} ; \quad (b) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

1. Chứng minh rằng (a) và (b) chéo nhau.
2. Lập phương trình đường vuông góc chung của (a) và (b).

Giải

1. Gọi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ là giao điểm nếu có của (a) và (b).

$$\text{Ta có : } \begin{cases} x_0 = 1 - t = 1 + t' & (1) \\ y_0 = 2 + 2t = 3 - 2t' & (2) \\ z_0 = 3t = 1 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$(1) \Rightarrow t' = -\frac{1}{3}$$

$$(2) \Rightarrow 2 + \frac{2}{3} = 3 + \frac{2}{3} \quad (\text{vô lí})$$

Vậy : $(a) \cap (b) = \emptyset$.

Ta lại có : $\vec{a}_a = (-1, 2, 3)$

$\vec{a}_b = (1, -2, 0)$

$\vec{a}_a \neq k \vec{a}_b$

Vậy (a) và (b) chéo nhau.

2. Ta xác định vectơ $\vec{n}$ thỏa :
$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a}_a \\ \vec{n} \perp \vec{a}_b \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } \vec{n} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (6, 3, 0)$$

$$\vec{n} = (2, 1, 0)$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa (a) và cùng phương với $\vec{n}$.

Ta có : $\vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-3, 6, -5)$

Phương trình của (α) có dạng : $-3x + 6y - 5z + D = 0$

$A(1, 2, 0) \in (\alpha) \Rightarrow A \in (\alpha)$

$\Rightarrow (-3).(1) + (6).(2) - 5(0) + D = 0 \Rightarrow D = -9$

Phương trình tổng quát của (α) là :

$-3x + 6y - 5z - 9 = 0 \Leftrightarrow 3x - 6y + 5z + 9 = 0$

Gọi (β) là mặt phẳng chứa (b) và cùng phương với $\vec{n}$.

Ta có : $\vec{n}_\beta = \left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 5)$

$\Rightarrow \vec{n}'_\beta = (0, 0, 1)$

Phương trình của (β) có dạng : $z + D = 0$

$B(1, 3, 1) \in (\beta) \Rightarrow B \in (\beta) \Rightarrow 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1$

Phương trình tổng quát của (β) là : $z - 1 = 0$

Gọi (Δ) là đường vuông góc chung của (a) và (b) ta có : $(\alpha) \cap (\beta) = (\Delta)$

Vậy phương trình đường vuông góc chung (Δ) của (a) và (b) là :

$$\begin{cases} 3x - 6y + 5z + 9 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

Bài 2 Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng (a) và (b) chéo nhau có phương trình :

$$(a) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -t \end{cases} ; \quad (b) \begin{cases} x = -2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 4 \end{cases}$$

1. Lập phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng (a) và (b) .

2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau đó.

Giải

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng (a) là : $\vec{a} = (2, -2, -1)$

Vectơ chỉ phương của đường thẳng (b) là : $\vec{b} = (-2, 3, 0)$

Gọi $\vec{n}$ là vectơ chỉ phương của đường vuông góc chung của (a) và (b), ta có :

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left(\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \right) = (3, 2, 2)$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa (a) và cùng phương với $\vec{n}$. Ta có :

$$\vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-2, -7, 10)$$

Phương trình của (α) có dạng : $-2x - 7y + 10z + D = 0$

$$\begin{aligned} A(1, 2, 0) \in (a) &\Rightarrow A \in (\alpha) \Rightarrow (-2)(1) - 7(2) + 0 + D = 0 \\ &\Rightarrow D = 16 \end{aligned}$$

Phương trình tổng quát của (α) là :

$$-2x - 7y + 10z + 16 = 0 \Leftrightarrow 2x + 7y - 10z - 16 = 0$$

Tương tự gọi (β) là mặt phẳng chứa (b) và cùng phương với $\vec{n}$.

$$\text{Ta có : } \vec{n}_\beta = \left(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (6, 4, -13)$$

Phương trình của (β) có dạng : $6x + 4y - 13z + D = 0$

$$\begin{aligned} B(0, -5, 4) \in (b) &\Rightarrow B \in (\beta) \Rightarrow 6(0) + 4(-5) - 13(4) + D = 0 \\ &\Rightarrow D = 72 \end{aligned}$$

Phương trình tổng quát của (β) là : $6x + 4y - 13z + 72 = 0$

Gọi (Δ) là đường vuông góc chung của (a) và (b) ta có : $(\alpha) \cap (\beta) = \Delta$

Vậy phương trình đường vuông góc chung (Δ) của (a) và (b) là :

$$(\Delta) \begin{cases} 2x + 7y - 10z - 16 = 0 \\ 6x + 4y - 13z + 72 = 0 \end{cases}$$

2. Gọi (γ) là mặt phẳng chứa (a) và song song với (b). Ta có (γ) đi qua điểm cố định $A(1, 2, 0)$ và có các vectơ chỉ phương là :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (2, -2, -1); \quad \vec{b} = (-2, 3, 0) \\ \Rightarrow \vec{n}_\gamma &= \left(\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \right) = (3, 2, 2) \end{aligned}$$

Phương trình của (γ) có dạng : $3x + 2y + 2z + D = 0$

$$A \in (\gamma) \Rightarrow 3(1) + 2(2) + 2(0) + D = 0 \Rightarrow D = -7$$

Phương trình tổng quát của (γ) là : $3x + 2y + 2z - 7 = 0$

Ta có : $B(0, -5, 4) \in (b)$

$$\Rightarrow d(a, b) = d(B, \gamma) = \frac{|3(0) + 2(-5) + 2(4) - 7|}{\sqrt{9 + 4 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{17}} = \frac{9\sqrt{17}}{17}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $(a), (b)$ là : $\frac{9\sqrt{17}}{17}$

Bài 3

Lập phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng :

$$(a) \begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} ; (b) \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

Giải

Vectơ chỉ phương của đường thẳng (a) là :

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-3, 1, -6)$$

Vectơ chỉ phương của đường thẳng (b) là :

$$\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-2, -1, 4)$$

Ta lấy điểm $A(2, 1, 3) \in (a)$ và điểm $B(3, 0, -6) \in (b)$

Gọi $\vec{n}$ là vectơ chỉ phương của đường vuông góc chung của (a) và (b) .

Ta có :

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-2, 24, 5)$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa (a) và cùng phương với $\vec{n}$.

$$\text{Ta có : } \vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 24 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 24 \end{vmatrix} \right) = (149, 27, -70)$$

Phương trình của (α) có dạng : $149x + 27y - 70z + D = 0$

$$\begin{aligned} A(2, 1, 3) \in (\alpha) &\Rightarrow (149).(2) + (27).(1) - (70).(3) + D = 0 \\ &\Rightarrow D = -115 \end{aligned}$$

Phương trình tổng quát của (α) là : $149x + 27y - 70z - 115 = 0$.

Gọi (β) là mặt phẳng chứa (b) và cùng phương với $\vec{n}$.

Ta có : $\vec{n}_\beta = \left(\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 24 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 24 \end{vmatrix} \right) = (-101, 2, -50)$

Phương trình của (β) có dạng : $-101x + 2y - 50z + D = 0$

$B(3, 0, -6) \in (\beta) \Rightarrow (-101)(3) + 2(0) - 50(-6) + D = 0 \Rightarrow D = 3$

Phương trình tổng quát của (β) là : $-101x + 2y - 50z + 3 = 0$

Gọi (Δ) là đường vuông góc chung của (a) và (b) ta có : $(\alpha) \cap (\beta) = \Delta$

Vậy phương trình đường vuông góc chung (Δ) của (a) và (b) là :

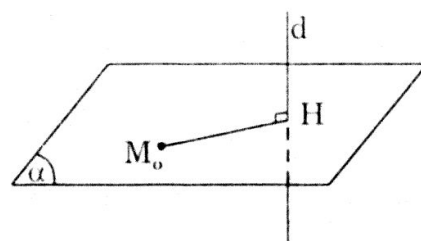
$$(\Delta) \begin{cases} 149x + 27y - 70z - 115 = 0 \\ 101x - 2y + 50z - 3 = 0 \end{cases}$$

§6. HÌNH CHIẾU

1. Để tìm hình chiếu của một điểm M_0 lên một đường thẳng (d) ta thực hiện các bước :

Bước 1 : Lập phương trình của mặt phẳng (α) chứa M_0 và vuông góc với (d) .

Bước 2 : Tìm giao điểm H của (α) và (d) .
Ta có : H là hình chiếu của M_0 lên (d) .

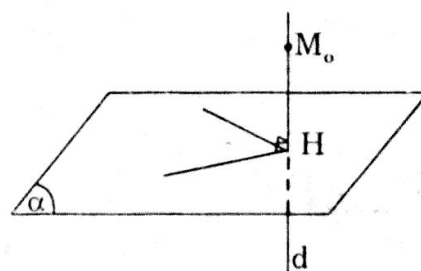


h.4.16

2. Để tìm hình chiếu của một điểm M_0 lên một mặt phẳng (α) ta thực hiện các bước :

Bước 1 : Lập phương trình của đường thẳng (d) chứa M_0 và vuông góc với (α) .

Bước 2 : Tìm giao điểm H của (d) và (α) .
Ta có : H chính là hình chiếu của M_0 lên (α) .

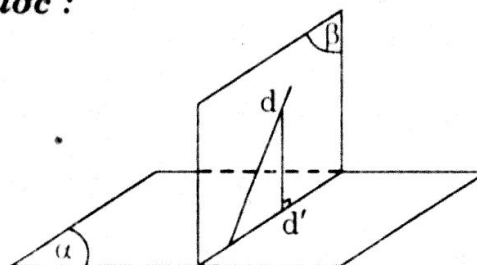


h.4.17

3. Để lập phương trình hình chiếu (d') của một đường thẳng (d) lên mặt phẳng (α) ta thực hiện các bước :

Bước 1 : Lập phương trình của mặt phẳng (β) chứa (d) và vuông góc với (α) .

Bước 2 : Lập phương trình của (d') dựa vào tính chất $(\alpha) \cap (\beta) = (d')$.



h.4.18

BÀI TẬP

Bài 1

Trong không gian Oxyz cho đường thẳng : (d)

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 6 + t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

Tìm tọa độ hình chiếu của điểm $M_0(1, -2, 3)$ trên đường thẳng (d).

Giải

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M_0 và vuông góc với (d), ta có :

$$\vec{n}_\alpha = \vec{a}_d = (2, 1, 4)$$

Phương trình của (α) có dạng : $2x + y + 4z + D = 0$

$$M_0(1, -2, 3) \in (\alpha) \Rightarrow 2 - 2 + 12 + D = 0 \Rightarrow D = -12$$

Vậy phương trình của (α) là : $2x + y + 4z - 12 = 0$

Ta tìm giao điểm của (d) và (α)

$$\text{Xét phương trình : } 2(-1 + 2t) + (6 + t) + 4(-1 + 4t) - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 21t = 12 \Leftrightarrow t = \frac{4}{7}$$

$$\text{Vậy } (\alpha) \text{ cắt (d) tại điểm : } H \begin{cases} x = -1 + \frac{8}{7} = \frac{1}{7} \\ y = 6 + \frac{4}{7} = \frac{46}{7} \\ z = -1 + \frac{16}{7} = \frac{9}{7} \end{cases}$$

Vậy hình chiếu của M_0 lên đường thẳng (d) là $H\left(\frac{1}{7}, \frac{46}{7}, \frac{9}{7}\right)$.

Bài 2

Trong không gian Oxyz cho điểm $A(1, 2, 0)$ và mặt phẳng (α) có phương trình : $2x + y + z + 3 = 0$.

Tìm tọa độ hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (α) .

Giải

Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (α) .

$$\text{Ta có : } \vec{a}_d = \vec{n}_\alpha = (2, 1, 1)$$

$$\text{Phương trình tham số của (d) là : } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

Ta tìm giao điểm của (d) và (α)

Xét phương trình : $2(1 + 2t) + (2 + t) + t + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 6t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{7}{6}$$

Vậy (d) cắt (α) tại điểm : $H \begin{cases} x = 1 - \frac{14}{6} = -\frac{8}{6} \\ y = 2 - \frac{7}{6} = \frac{5}{6} \\ z = -\frac{7}{6} \end{cases}$

Vậy hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (α) là : $H\left(-\frac{8}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{7}{6}\right)$.

Bài 3 Lập phương trình đường thẳng (d') là hình chiếu của đường thẳng

(d) : $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$ lên mặt phẳng (α) : $x + y - z = 0$.

Giải

Gọi (β) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (α). (β) có cặp vectơ chỉ phương là :

$$\vec{a}_d = (2, 1, 3); \quad \vec{n}_\alpha = (1, 1, -2)$$

$$\Rightarrow \vec{u}_\beta = \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-5, 7, 1)$$

Phương trình của (β) có dạng : $-5x + 7y + z + D = 0$ (*)

Ta lấy điểm $M_0(0, 1, 1) \in d \Rightarrow M_0 \in (\beta)$

Thay tọa độ của M_0 vào (*) ta có :

$$-5 \cdot (0) + 7 \cdot (1) + (1) + D = 0 \Rightarrow D = -8$$

Vậy phương trình của (β) là :

$$-5x + 7y + z - 8 = 0 \Leftrightarrow 5x - 7y - z + 8 = 0$$

Ta có : $d' = (\alpha) \cap (\beta)$

Vậy phương trình của đường thẳng (d'), hình chiếu của đường thẳng (d) xuống mặt phẳng (α) là :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5x - 7y - z + 8 = 0 \end{cases}$$

Bài 4

Cho đường thẳng (d) có phương trình : $\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$

Hãy lập phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y + z - 1 = 0$.

Giải

Gọi (β) là mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và vuông góc với mặt phẳng (α) . Phương trình của (β) có dạng :

$$m(5x - 4y - 2z - 5) + n(x + 2z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (5m + n)x - 4my - (2m - 2n)z - 5m - 2n = 0$$

$$\vec{n}_{\beta} = (5m + n, -4m, -2m + 2n)$$

$$\vec{n}_{\alpha} = (2, -1, 1)$$

$$(\beta) \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{n}_{\beta} \perp \vec{n}_{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 2(5m + n) + 4m + (-2m + 2n) = 0 \Leftrightarrow 12m + 4n = 0$$

$$\text{Cho } n = 3 \Rightarrow m = -1$$

Phương trình của (β) là :

$$-2x - 4y + 8z - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y - 8z + 1 = 0$$

Gọi (d') là hình chiếu của (d) trên mặt phẳng (α) , ta có : $(d') = (\alpha) \cap (\beta)$

$$\text{Vậy phương trình của } (d') \text{ là : } \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + 4y - 8z + 1 = 0 \end{cases}$$

BÀI TẬP**1. Lập phương trình tham số của đường thẳng (d)**

a) Đi qua điểm $M_0(2, -3, 5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-3, 4, -2)$.

b) Qua hai điểm $M(-4, 2, 3)$, $N(2, -1, 6)$.

2. Lập phương trình chính tắc và phương trình tổng quát của đường thẳng (d) :

a) Đi qua điểm $M_0(2, -3, 5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (3, 2, -4)$.

$$\text{b) Có phương trình tham số : (d) } \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -2 + 5t \end{cases}$$

3. Cho đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1, 3, -2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-2, 1, 5)$.

Tìm giao điểm của (d) với mặt phẳng $(\alpha): 4x + y + 2z - 6 = 0$.

4. Cho đường thẳng (Δ) có phương trình: (Δ) $\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ 3x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$

Tìm khoảng cách từ điểm $A(1, 3, 5)$ đến (Δ).

5. Cho hai đường thẳng: (d_1): $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-2}$

$$(\mathbf{d}_2): \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$$

a) Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b) Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. a) (d): $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$

b) (d): $\begin{cases} x = -4 + 6t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

2. a) (d): $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-4}$

b) (d): $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+2}{5}$

(d): $\begin{cases} 2x - 3y - 13 = 0 \\ 4x + 3z - 23 = 0 \end{cases}$

(d): $\begin{cases} 3x + 2y - 13 = 0 \\ 5x + 2z - 11 = 0 \end{cases}$

3. Viết phương trình tham số của (d)

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -2 + 5t \end{cases}$$

Thay vào (α) suy ra $t = 1$. Ta có: $M(-1, 4, 3)$.

4. $d(A, \Delta) = \sqrt{14}$.

5. a) Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa (d_1) và cùng phương với (d_2).

Chứng minh d_2 chứa trong (α).

b) $d(d_1, d_2) = \frac{7}{3}$.

MẶT CẦU VÀ MẶT TRỤ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình mặt cầu tâm $I(a, b, c)$ bán kính R là :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

2. Điều kiện cần và đủ để phương trình :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

là phương trình của một mặt cầu là :

$$a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$$

Khi đó mặt cầu có tâm là $I(a, b, c)$ và có bán kính là :

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

Phương trình mặt trụ tròn xoay :

- Có trục cùng phương Oz :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- Có trục cùng phương với Oy :

$$(x - a)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

- Có trục cùng phương với Ox :

$$(y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

3. Phương trình mặt trụ :

- Có trục cùng phương với Oz :

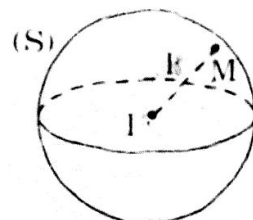
$$F(x, y) = 0$$

- Có trục cùng phương với Oy :

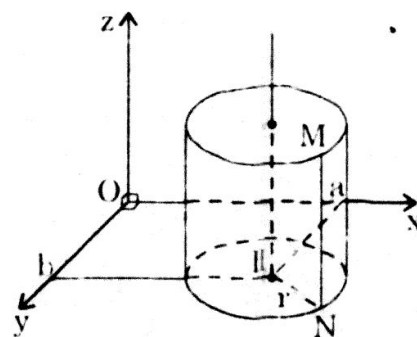
$$F(x, z) = 0$$

- Có trục cùng phương với Ox :

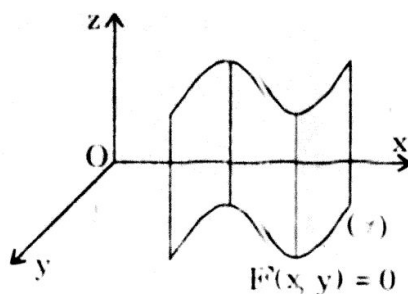
$$F(y, z) = 0$$



h.5.1



h.5.2



h.5.3

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Để lập phương trình của một mặt cầu (S) ta thường dùng các cách sau :

Cách 1 : Xác định tâm I(a, b, c) và bán kính R của mặt cầu. Khi đó phương trình của mặt cầu là :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Cách 2 : - Viết phương trình mặt cầu (S) dưới dạng :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (1)$$

- Tìm các hệ số a, b, c, d thay vào (1)

2. Vị trí tương đối của mặt phẳng

$$(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$$

và mặt cầu : (S) : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$

Đặt $h = d(I, \alpha)$, ta có :

Trường hợp 1 : $h > R$: (α) không cắt (S)

Trường hợp 2 : $h = R$ tiếp xúc với (S)

Trường hợp 3 : $h < R$: (α) cắt (S) theo một đường tròn (C) có phương

$$\text{trình là : } \begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

3. Để lập phương trình của mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu tâm I, bán kính R :

$$(S) : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ với $M_0 \in (S)$. Ta thực hiện các bước :

$$\text{Cách 1 : Dùng tính chất : } \begin{cases} \vec{n}_{(\alpha)} = \vec{IM}_0 \\ M_0 \in (\alpha) \end{cases}$$

Cách 2 : Dùng công thức phân đôi tọa độ :

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) + (z - c)(z_0 - c) = R^2$$

$$\text{Hoặc } x_0x + y_0y + z_0z - a(x_0 + x) - b(y_0 + y) - c(z_0 + z) + d = 0.$$

C. BÀI TẬP

Bài 1

Lập phương trình mặt cầu (S) trong các trường hợp sau :

1. (S) có tâm là I(1, 2, 3) và bán kính là $R = 5$.

2. (S) có tâm là I(-1, 2, 3) và đi qua điểm M(1, 0, 1).

Giải

1. Phương trình mặt cầu là :

$$(S) : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

$$(S) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$$

2. Ta có : $M \in (S)$

$$\Rightarrow R^2 = IM^2 = (1 + 1)^2 + (0 - 2)^2 + (1 - 3)^2 = 4 + 4 + 4 = 12$$

Phương trình mặt cầu là :

$$(S) : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

$$(S) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 12$$

Bài 2 Lập phương trình của mặt cầu (S) :

1. Có đường kính là AB với $A(6, 2, -5)$, $B(-4, 0, 7)$.

2. Có tâm $I(3, -5, -2)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y - 3z + 11 = 0$.

Giải

1. (S) có tâm I là trung điểm của AB ta có : $I(1, 1, 1)$

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(-4 - 6)^2 + (0 - 2)^2 + (7 + 5)^2} = \sqrt{62}$$

Phương trình mặt cầu (S) là :

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 62.$$

$$2. (S) \text{ tiếp xúc với } (\alpha) \Rightarrow R = d(I, \alpha) = \frac{|6 + 5 + 6 + 11|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{28}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{14}$$

Phương trình mặt cầu (S) là :

$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (z + 2)^2 = 56.$$

Bài 3 Trong không gian Oxyz cho tứ diện ABCD biết $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 1)$, $C(1, 1, 2)$, $D(2, 2, 1)$.

1. Hãy lập phương trình của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

2. Tìm tâm và bán kính của mặt cầu ấy.

Giải

1. Phương trình của mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD có dạng :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

Do bốn điểm A, B, C, D nằm trên mặt cầu nên ta có :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 1 + 1 + 1 - 2a - 2b - 2c + d = 0 \\ 1 + 4 + 1 - 2a - 4b - 2c + d = 0 \\ 1 + 1 + 4 - 2a - 2b - 4c + d = 0 \\ 4 + 4 + 1 - 4a - 4b - 2c + d = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2a + 2b + 2c - d = 3 \\ 2a + 4b + 2c - d = 6 \\ 2a + 2b + 4c - d = 6 \\ 4a + 4b + 2c - d = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{3}{2} \\ d = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0.$$

2. (S) có tâm $I\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ và có bán kính là :

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} - 6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Bài 4 Cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z = 0$

và mặt phẳng (α) : $4x + 3y + m = 0$

Biện luận theo m vị trí tương đối của (α) và (S).

Giải

(S) có tâm là $I(1, 0, 1)$ và bán kính là :

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{1 + 0 + 1 - 0} = \sqrt{2}$$

$$\text{Ta có : } h = d(I, \alpha) = \frac{|4 + 0 + m|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|4 + m|}{5}$$

Ta so sánh h và R :

$$\text{Xét } f(m) = h^2 - R^2 = \frac{(m + 4)^2}{25} - 2 = \frac{1}{25} [m^2 + 8m - 34]$$

$$\Delta' = 16 + 34 = 50$$

$f(m)$ có hai nghiệm là : $m_1 = -4 - 5\sqrt{2}$

$$m_2 = -4 + 5\sqrt{2}$$

Trường hợp 1 : $m < -4 - 5\sqrt{2}$ hay $m > -4 + 5\sqrt{2}$

$$h > R : (\alpha) \cap (S) = \emptyset$$

Trường hợp 2 : $m = -4 - 5\sqrt{2}$ hay $m = -4 + 5\sqrt{2}$

$h = R : (\alpha)$ tiếp xúc với (S) tại một điểm.

Trường hợp 3 : $-4 - 5\sqrt{2} < m < -4 + 5\sqrt{2}$

$$h < R : (\alpha) \cap (S) = (C)$$

(α) cắt (S) theo một đường tròn (C) có phương trình

$$\text{là : } (C) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z = 0 \\ 4x + 3y + m = 0 \end{cases}$$

Bài 5

Lập phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu :

$$(S) : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 49 \text{ tại điểm } M_0(7, -1, 5).$$

Giải

(S) có tâm là $I(1, -3, 2)$

Gọi (α) là mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại M_0 .

Ta có : $\vec{n}_\alpha = \vec{IM}_0 = (6, 2, 3)$

Phương trình (α) có dạng : $6x + 2y + 3z + D = 0$

$$M_0(7, -1, 5) \in (\alpha) \Rightarrow 42 - 2 + 15 + D = 0 \Rightarrow D = -55$$

Vậy phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại M_0 là :

$$(\alpha) : 6x + 2y + 3z - 55 = 0.$$

Bài 6

Viết phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z + 5 = 0 \text{ tại điểm } M_0(4, 3, 0).$$

Giải

Cách 1 : (S) có tâm là $I(3, 1, -2)$

Gọi (α) là mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại M_0 . Ta có :

$$\vec{n}_\alpha = \vec{IM}_0 = (1, 2, 2)$$

Phương trình của (α) có dạng : $x + 2y + 2z + D = 0$

$$M_0(4, 3, 0) \in (\alpha) \Rightarrow 4 + 6 + D = 0 \Rightarrow D = -10$$

Cách 2 : Phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại M_0 viết theo công thức phân đôi là :

$$(\alpha) : 4x + 3y + 0z - 3(x + 4) - (y + 3) + 2(z + 0) + 5 = 0$$

$$(\alpha) : x + 2y + 2z - 10 = 0.$$

Bài 7

Lập phương trình của mặt trụ ngoại tiếp mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và :

1. Có đường sinh song song với trục Ox.
2. Có đường sinh song song với trục Oy.
3. Có đường sinh song song với trục Oz. Hãy cắt mặt trụ này bởi mặt phẳng $z = 4$ và viết phương trình của giao tuyến đó.

Giai

1. Gọi (C_1) là giao của (S) và mặt phẳng (yOz) ta có phương trình của (C_1) là :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Phương trình của mặt trụ (T_1) có đường chuẩn là (C_1) và đường sinh song song với trục Ox là :

$$(T_1) : y^2 + z^2 = 1.$$

2. Tương tự đặt $(C_2) = (S) \cap (xOz)$

$$\text{Phương trình của } (C_2) \text{ là : } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Phương trình của mặt trụ (T_2) có đường chuẩn là (C_2) và đường sinh song song với trục Oy là :

$$(T_2) : x^2 + z^2 = 1.$$

3. Đặt $(C_3) = (S) \cap (xOy)$

$$\text{Phương trình của } (C_3) \text{ là : } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Phương trình của mặt trụ (T_3) có đường chuẩn là (C_3) và đường sinh song song với Oz là :

$$(T_3) : x^2 + y^2 = 1.$$

Phương trình của đường tròn (C_4) giao tuyến của mặt phẳng $(\alpha) : z = 4$ với mặt trụ $(T_3) : x^2 + y^2 = 1$ là :

$$(C_4) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Bài 8 Lập phương trình của mặt trụ tròn xoay có đường chuẩn là:

1.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 2 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 10 \\ x = 9 \end{cases}$$

Giải

1. $x^2 + y^2 = 16.$

2. $y^2 + z^2 = 10.$

Bài 9 Lập phương trình của mặt trụ tròn xoay đi qua điểm $M(1, 2, 3)$ và :

1. nhận trục Ox làm trục quay.

2. nhận trục Oy làm trục quay.

3. nhận trục Oz làm trục quay.

Giải

1. Phương trình mặt trụ tròn xoay trục Ox là :

$$(T_1) : y^2 + z^2 = R^2$$

$$M \in (T_1) \Leftrightarrow 4 + 9 = R^2$$

Vậy phương trình mặt trụ (T_1) là : $y^2 + z^2 = 13.$

2. Phương trình mặt trụ tròn xoay trục Oy là :

$$(T_2) : x^2 + z^2 = R^2$$

$$M \in (T_2) \Leftrightarrow 1 + 9 = R^2$$

Vậy phương trình mặt trụ (T_2) là : $x^2 + z^2 = 10.$

3. Phương trình mặt trụ tròn xoay trục Oz là :

$$(T_3) : x^2 + y^2 = R^2$$

$$M \in (T_3) \Leftrightarrow 1 + 4 = R^2$$

Vậy phương trình mặt trụ (T_3) là : $x^2 + y^2 = 5.$

Bài 10 Trong không gian $Oxyz$ cho mặt trụ (T) có phương trình : $x^2 + y^2 = 25.$

Hãy lập phương trình của mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt trụ (T) tại điểm $M(3, 4, 5).$

Giải

Mặt trụ (T) có trục là Oz và có đường chuẩn là đường tròn (C) có phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$$

Gọi M' là hình chiếu của M xuống mặt phẳng (xOy) .

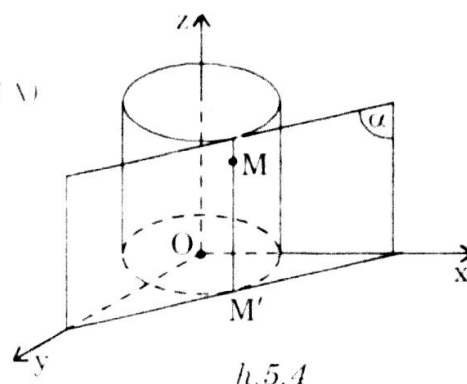
Ta có : $M'(3, 4, 0)$

Mặt phẳng (α) cắt (xOy) theo giao tuyến (Δ) ta có (Δ) là tiếp tuyến của (C) tại M' .

Phương trình của (Δ) là :
$$\begin{cases} 3x + 4y = 25 \\ z = 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình của (α) là :

$$3x + 4y - 25 = 0$$



Bài 11

Lập phương trình của mặt cầu đi qua đường tròn :

$$(C) \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 49 \\ 2x + 2y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

và qua gốc tọa độ.

Giải

Mặt cầu (S) chứa đường tròn (C) là giao tuyến của mặt cầu :

$$(S) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 49$$

và mặt phẳng : $(\alpha) : 2x + 2y - z - 4 = 0$

Nên phương trình của (S) có dạng :

$$m(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - 40) + n(2x + 2y - z - 4) = 0$$

$$O \in S' \Leftrightarrow -40m - 4n = 0 \Leftrightarrow 10m + n = 0$$

Cho $n = 10 \Rightarrow m = -1$

Vậy phương trình (S') là :

$$-(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - 10) + 10(2x + 2y - z - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 22x - 24y + 14z + 30 = 0$$

Vậy phương trình của mặt cầu (S') là :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 22x - 24y + 14z + 30 = 0.$$

Bài 12

Lập phương trình của mặt cầu đi qua đường tròn (C) là giao tuyến của hai mặt cầu :

$$(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$$

$$(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2z - 11 = 0$$

và đi qua điểm $M_0(1, 1, 1)$.

Giải

Mặt cầu (S) đi qua đường tròn (C) với :

$$(C) = (S_1) \cap (S_2)$$

Nên phương trình (S) có dạng

$$m(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3) + n(x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2z - 11) = 0$$

$$M_0(1, 1, 1) \in (S) \Leftrightarrow -4m - 6n = 0 \Leftrightarrow 2m + 3n = 0$$

Cho $m = 3 \Rightarrow n = -2$

Vậy phương trình (S) là :

$$3(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3) - 2(x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2z - 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 6y - 8z + 13 = 0.$$

BÀI TẬP

1. Lập phương trình mặt cầu (S)

a) Tâm $I(1, -3, 2)$ bán kính $R = 5$.

b) Đường kính AB với $A(1, -2, 4)$, $B(3, -4, -2)$.

2. Lập phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD với $A(1, 0, 2)$, $B(2, -1, 1)$, $C(0, 2, 1)$, $D(-1, 3, 0)$.

3. Lập phương trình mặt cầu đi qua các đường tròn sau :

$$(C_1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases} ; \quad (C_2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 2 \end{cases}$$

4. Cho mặt cầu (S) : $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 25$.

Lập phương trình mặt trụ (T) tiếp xúc với mặt cầu (S) và có trục song song với Oz.

5. Trong không gian Oxyz cho mặt trụ (T) có phương trình :

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = R^2$$

$$\text{và đường thẳng (d)} \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Tìm R để đường thẳng (d) nằm trong một mặt phẳng tiếp xúc với mặt trụ (T).

HƯỚNG DẪN ĐÁP SỐ

1. a) (S) : $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 25$

b) Tâm I là trung điểm AB

$$\text{Bán kính } R = \frac{AB}{2}$$

$$(S) : (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 11.$$

2. Phương trình (S) có dạng : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Thay tọa độ của bốn điểm A, B, C, D vào ta tính được a, b, c, d.

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 7x + 5y + 3z - 18 = 0.$$

3. (S) : $x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 34.$

4. - Lập phương trình của đường tròn lớn của (S) có mặt phẳng song song với (xOy)

$$(C) : \begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25 \\ z = 2 \end{cases}$$

- Phương trình của (T) là : $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25.$

5. - Lập phương trình trục (Δ) của mặt trụ.

- Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa (d) và song song với (Δ).

- Lấy điểm M thuộc (Δ).

- $d(M, \alpha) = R$

- $R = \frac{\sqrt{13}}{13}.$

ĐỀ TOÁN LUYỆN THI

Đề 1

Cho hai điểm $A(-1, 3, -2)$, $B(-9, 4, 9)$ và mặt phẳng (P) có phương trình : $2x - y + z + 1 = 0$.

Tìm điểm K thuộc (P) sao cho $AK + BK$ nhỏ nhất.

Giải

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P) , $A'B$ cắt (P) tại K . Ta chứng minh K là điểm cần tìm.

$\forall K' \in (P)$ ta có :

$$K'A + K'B = K'A' + K'B \geq A'B = KA' + KB = KA + KB$$

Vậy : $K'A + K'B \geq KA + KB$

Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với P ta có :

$$\vec{a}_d = \vec{n}_P = (2, -1, 1)$$

$$\text{Phương trình tham số của } d : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

$$H \in (P) \Rightarrow 2(-1 + 2t) - (3 - t) + (-2 + t) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 6t - 6 = 0 \Rightarrow t_H = 1 \Rightarrow t_A = 2$$

$$\text{Tọa độ điểm } A' \text{ là : } \begin{cases} x = -1 + 4 = 3 \\ y = 3 - 2 = 1 \\ z = -2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Vậy : $A'(3, 1, 0)$

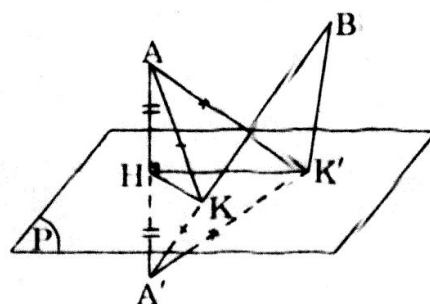
$$\vec{A'B} = (-12, 3, 9)$$

$$\vec{n}_{A'B} = (4, -1, -3)$$

$$\text{Phương trình tham số của } A'B : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 - t \\ z = -3t \end{cases}$$

$$K \in (P) \Rightarrow 2(3 + 4t) - (1 - t) + (-3t) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 6t + 6 = 0 \Rightarrow t_K = -1$$



h.6.1

$$\text{Tọa độ điểm K là : } \begin{cases} x = 3 - 4 = -1 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy điểm K(-1, 2, 3) thỏa điều kiện của đề bài.

Đề 2

Lập phương trình chính tắc của đường thẳng (d) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$

Giải

Cách 1 :

$$(d) \begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 & (1) \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Cộng (1) và (2) vế với vế ta được : } 2x - z - 4 = 0 \quad (3)$$

$$\text{Cho } x = 0 \Rightarrow z = -4.$$

$$\text{Thay vào (1) ta được : } y = -8$$

$$\text{Vậy điểm } A(0, -8, -4) \in (d)$$

$$\text{Ta lại có : } \vec{a}_d = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (4, 14, 8)$$

$$\vec{a}'_d = (2, 7, 4)$$

$$\text{Vậy phương trình chính tắc của (d) là : } \frac{x}{2} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+4}{4}.$$

Cách 2 :

Phương trình tham số của đường thẳng (d) :

$$\begin{cases} x = t \\ -2y + 3z = 4 - t \\ 2y - 5z = 4 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -8 + \frac{7}{2}t \\ z = 2t - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t' \\ y = -8 + 7t' \\ z = -4 + 4t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{x}{2} \\ t' = \frac{y+8}{7} \\ t' = \frac{z+4}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình chính tắc của (d) là : } \frac{x}{2} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+4}{4}.$$

Đề 3

Lập phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(2, 3, -5)$

và song song với đường thẳng : (d) $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

Giải

Cách 1 :

Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua điểm $M(2, 3, -5)$ và song song với đường

thẳng : (d) $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

Ta có : $\vec{a}_{\Delta} = \vec{a}_d = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-4, 8, 10)$

$$\Rightarrow \vec{a}'_{\Delta} = (2, -4, -5)$$

Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) là :

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+5}{-5}$$

Cách 2 :

Phương trình tham số của (d) là :

$$\begin{cases} x = t \\ -y + 2x = 7 - 3t \\ 3y - 2z = -3 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = \frac{9}{2} - \frac{5}{2}t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_d = \left(1, -2, -\frac{5}{2} \right)$$

$$\vec{a}'_d = (2, -4, -5)$$

$$(\Delta) // (d) \Rightarrow \vec{a}_{\Delta} = (2, -4, -5)$$

Vậy phương trình chính tắc của (Δ) là : $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+5}{-5}$

Đề 4

Hãy xác định góc nhọn tạo bởi đường thẳng : (d) $\begin{cases} x + 4y - 2z + 7 = 0 \\ 3x + 7y - 2z = 0 \end{cases}$

với mặt phẳng $(\alpha) : 3x + y - z + 1 = 0$.

Giải

Ta có : $\vec{n}_\alpha = (3, 1, -1)$

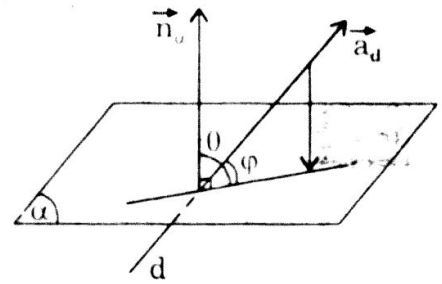
$$\vec{a}_d = \left(\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{a}_d = (6, -4, -5)$$

$$\vec{n}_\alpha = (3, 1, -1)$$

$$\sin(\widehat{d, \alpha}) = |\cos(\widehat{\vec{a}_{\alpha'}, \vec{a}_d})| = \frac{|18 - 4 + 5|}{\sqrt{36 + 16 + 25} \cdot \sqrt{9 + 1 + 1}} = \frac{19}{11\sqrt{7}}.$$

Vậy : $\widehat{d, \alpha} = \arcsin \frac{19}{11\sqrt{7}}.$



h.6.2

Đề 5

Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng :

$$(d) : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ 3x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : x - 2y + z + 5 = 0.$

Giải

Gọi (β) là mặt phẳng chứa đường thẳng :

$$(d) \begin{cases} x - 2z = 0 \\ 3x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

và vuông góc với mặt phẳng :

$$(\alpha) : x - 2y + z + 5 = 0$$

Ta có : $\vec{n}_\alpha = (1, -2, 1)$

$$\vec{a}_d = \left(\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (-4, -7, -2)$$

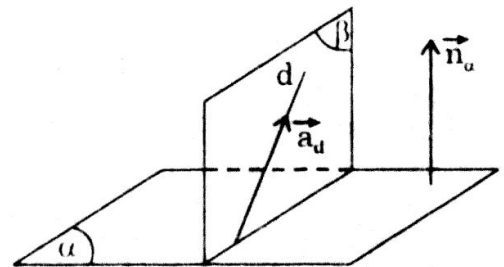
(β) có 2 vectơ chỉ phương là $\vec{n}_\alpha$ và $\vec{a}_d$

$$\Rightarrow \vec{n}_\beta = \left(\begin{vmatrix} -7 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -4 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (-11, 2, 15)$$

Phương trình (β) có dạng : $-11x + 2y + 15z + D = 0$

Ta lấy điểm $A(2, 2, 1) \in (d) \Rightarrow A(2, 2, 1) \in (\beta)$

$$\Rightarrow -22 + 4 + 15 + D = 0 \Rightarrow D = 3$$



h.6.3

Phương trình (β) có dạng : $-11x + 2y + 15z + 3 = 0$

Vậy phương trình của mặt phẳng (β) là :

$$(\beta) : 11x - 2y - 15z - 3 = 0.$$

Đề 6 Lập phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(-1, 2, -3)$ vuông góc với vectơ $\vec{a} = (6, -2, -3)$ và cắt đường thẳng :

$$(d) : \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}.$$

Giải

Cách 1 :

Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua M vuông góc với $\vec{a}$ và cắt đường thẳng (d) tại điểm A . Ta có (Δ) chứa trong mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với $\vec{a}$ và :

$$(d) \cap (\alpha) = \{A\}$$

Ta có : $\vec{n}_\alpha = \vec{a} = (6, -2, -3)$

Phương trình (α) có dạng :

$$6x - 2y - 3z + D = 0$$

$$M(-1, 2, -3) \in (\alpha) \Rightarrow -6 - 4 + 9 + D = 0 \Rightarrow D = 1$$

Vậy phương trình của (α) là : $6x - 2y - 3z + 1 = 0$

$$\text{Phương trình tham số của } (d) : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$$

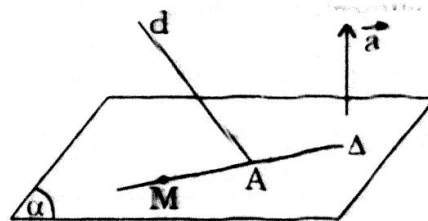
$$\begin{aligned} A \in (\alpha) &\Rightarrow 6(1 + 3t) - 2(-1 + 2t) - 3(3 - 5t) + 1 = 0 \\ &\Rightarrow 29t = 0 \Rightarrow t = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Tọa độ điểm } A \text{ là : } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\vec{MA} = (2, -3, 6)$$

Vậy phương trình của đường thẳng (Δ) cần tìm là :

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}.$$



h.6.4

Cách 2 :

$$\text{Đặt } (\beta) = (M, d) \Rightarrow (\Delta) = (\alpha) \cap (\beta)$$

Vậy phương trình của đường thẳng (Δ) cần tìm là :

$$\begin{cases} 6x - 2y - 3z + 1 = 0 & (\alpha) \\ 3x + 28y + z - 10 = 0 & (\beta) \end{cases}$$

ĐỀ 7

Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình :

$$(P) : 2x + y + z - 1 = 0; \quad (d) : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$$

Viết phương trình của đường thẳng (Δ) qua giao điểm của (P) và (d) , (Δ) và nằm trong (P) .

Giải

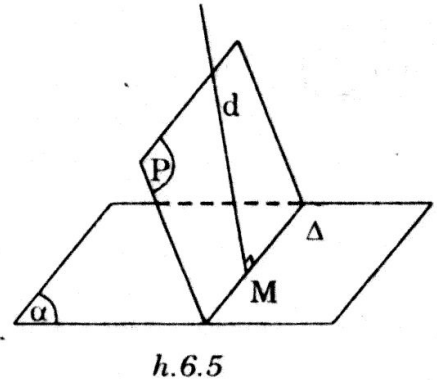
Cách 1 :

$$\text{Phương trình tham số của } (d) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$

$$(d) \text{ cắt } (P) \text{ tại } M \Rightarrow 2(1 + 2t) + (t) + (-2 - 3t) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy tọa độ điểm } M \text{ là : } M \begin{cases} x = 1 + 1 = 2 \\ y = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ z = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2} \end{cases}$$



Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với (d) . Ta có :

$$\vec{n}_\alpha = \vec{a}_d = (2, 1, -3)$$

Phương trình (α) có dạng : $2x + y - 3z + D = 0$

$$M\left(2, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right) \in (\alpha) \Rightarrow 4 + \frac{1}{2} + \frac{21}{2} + D = 0 \Rightarrow D = -15$$

$$\Rightarrow (\alpha) : 2x + y - 3z - 15 = 0$$

Ta có : $(\alpha) \cap (P) = \Delta$

Vậy phương trình của đường thẳng (Δ) cần tìm là : $\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - 3z - 15 = 0 \end{cases}$

Cách 2 :

Đường thẳng (Δ) cần tìm đi qua điểm $M\left(2, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ và có 2 vectơ pháp tuyến là :

$$\vec{a}_d = (2, 1, -3)$$

$$\vec{n}_p = (2, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_\Delta = \left(\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (4, -8, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{a}'_\Delta = (1, -2, 0)$$

Vậy phương trình của đường thẳng (Δ) cần tìm là :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = \frac{1}{2} - 2t \\ z = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

ĐỀ 8 Chứng tỏ rằng hai đường thẳng :

$$(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}; \quad (d_2): \begin{cases} x = 3t + 7 \\ y = 2t + 2 \\ z = -2t + 1 \end{cases}$$

cùng nằm trong một mặt phẳng. Lập phương trình của mặt phẳng ấy.

Giải

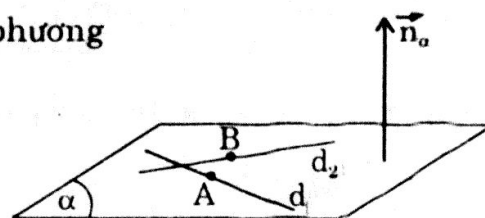
Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d_1) và cùng phương với (d_2) , (α) có 2 vectơ chỉ phương là :

$$\vec{a}_{d_1} = (2, -3, 4)$$

$$\vec{a}_{d_2} = (3, 2, -2)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-2, 16, 13)$$

Phương trình (α) có dạng : $-2x + 16y + 13z + D = 0$



h.6.6

$$\begin{aligned} \text{Ta lấy điểm } A(1, -2, 5) \in d_1 &\Rightarrow A \in (\alpha) \\ &\Rightarrow -2 - 32 + 65 + D = 0 \Rightarrow D = -31 \end{aligned}$$

Vậy phương trình của (α) là :

$$-2x + 16y + 13z - 31 = 0 \Leftrightarrow 2x - 16y - 13z + 31 = 0$$

Lấy điểm $B(7, 2, 1) \in (d_2)$

Thay tọa độ điểm B vào phương trình của mặt phẳng (α) ta thấy $B \in (\alpha)$
 $\Rightarrow (d_2)$ chứa trong (α)

Vậy (d_1) và (d_2) cùng nằm trong mặt phẳng (α)

Phương trình của mặt phẳng (α) đó là : $2x - 16y - 13z + 31 = 0$.

Đề 9 Lập phương trình của đường thẳng qua điểm $A(3, 2, 1)$ vuông góc với đường thẳng $(d) : \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{1}$ và cắt đường thẳng đó.

Giải

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng (d) .

Ta có : $\vec{n}_\alpha = \vec{a}_d = (2, 4, 1)$

Phương trình của (α) là :

$$2(x - 3) + 4(y - 2) + (z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y + z - 15 = 0$$

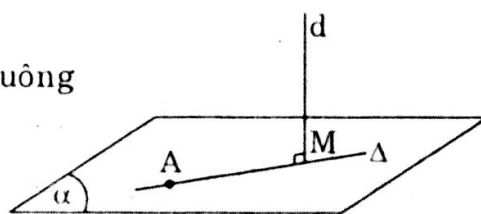
Phương trình tham số của (d) là :
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

$$(d) \text{ cắt } (\alpha) \text{ tại } M \Rightarrow 2(2t) + 4(4t) + (-3 + t) - 15 = 0 \Rightarrow t = \frac{6}{7}$$

Vậy tọa độ điểm M là :
$$\begin{cases} x = \frac{12}{7} \\ y = \frac{24}{7} \\ z = -\frac{15}{7} \end{cases}$$

$$\vec{AM} = \left(-\frac{9}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{22}{7} \right)$$

$$\vec{a}_\Delta = (-9, 10, -22)$$



h.6.7

Vậy phương trình của đường thẳng (Δ) là : $\frac{x-3}{-9} = \frac{y-2}{10} = \frac{z-1}{-22}$

Đề 10 Lập phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng :

$$(d) : \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{1}$$

lên mặt phẳng (α) : $x + 2y + 3z + 4 = 0$.

Giải

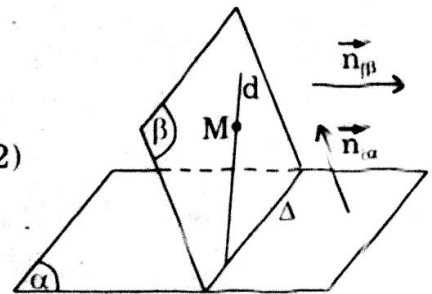
Gọi (β) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (α), (β) có 2 vectơ chỉ phương là :

$$\vec{a}_d = (3, 4, 1)$$

$$\vec{n}_\alpha = (1, 2, 3)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\beta = \left(\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (10, -8, 2)$$

$$\vec{n}'_\beta = (5, -4, 1)$$



h.6.8

Ta có : $M(2, -2, 1) \in (d) \Rightarrow M \in (\beta)$

Phương trình của (β) là :

$$5(x-2) - 4(y+2) + (z-1) = 0 \Leftrightarrow 5x - 4y + z - 19 = 0$$

Gọi (Δ) là hình chiếu của (d) xuống (α)

Ta có : $(\beta) \cap (\alpha) = (\Delta)$

Vậy phương trình của đường thẳng (Δ), hình chiếu của (d) xuống mặt phẳng (α) là :

$$(\Delta) : \begin{cases} x + 2y + 3z + 4 = 0 & (\alpha) \\ 5x - 4y + z - 19 = 0 & (\beta) \end{cases}$$

Đề 11 Xác định hình chiếu vuông góc của đường thẳng :

$$(d) \begin{cases} x - y + z - 5 = 0 \\ 2x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

lên mặt phẳng (P) : $3x - 2y - z + 15 = 0$.

Giải

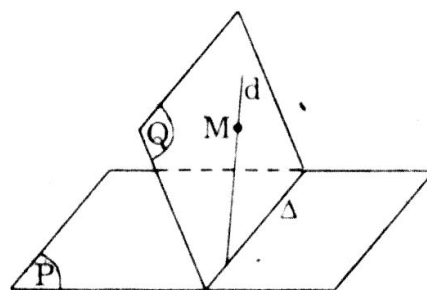
$$\text{Ta có : } \vec{a}_d = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-4, 1, 5)$$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P). (Q) có 2 vectơ chỉ phương :

$$\vec{a}_d = (-4, 1, 5)$$

$$\vec{n}_P = (3, -2, -1)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_Q = \left(\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (9, 11, 5)$$



h.6.9

Lấy điểm $M(-1, 0, 6) \in (d) \Rightarrow M \in (Q)$

Phương trình của mặt phẳng (Q) là :

$$9(x + 1) + 11(y) + 5(z - 6) = 0 \Leftrightarrow 9x + 11y + 5z - 21 = 0$$

Gọi (Δ) là hình chiếu của (d) xuống mặt phẳng (P) ta có :

$$(P) \cap (Q) = (\Delta)$$

Vậy phương trình của (Δ) là : (Δ) $\begin{cases} 3x - 2y - z + 15 = 0 \\ 9x + 11y + 5z - 21 = 0 \end{cases}$

Đề 1: Lập phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng :

$$(d_1) : \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$$

$$(d_2) : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

Giải

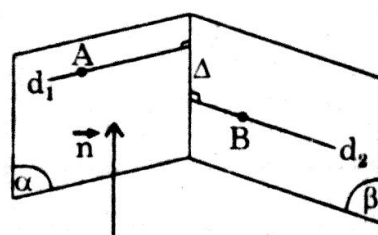
Ta có : $\vec{a}_{d_1} = (1, 2, -1)$

$$\vec{a}_{d_2} = (-7, 2, 3)$$

Gọi (Δ) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) ta có :

$$\begin{cases} \vec{a}_\Delta \perp \vec{a}_{d_1} \\ \vec{a}_\Delta \perp \vec{a}_{d_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_\Delta = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-8, -4, -16)$$

$$\vec{a}'_\Delta = (2, 1, 4)$$



h.6.10

Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d_1) và cùng phương với $\vec{a}'_\Delta$. Ta có :

$$\vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (9, -6, -3)$$

$$\vec{n}'_\alpha = (3, -2, -1)$$

Ta có : $A(7, 3, 9) \in d_1 \Rightarrow A(7, 3, 9) \in (\alpha)$

Phương trình của (α) là : $3(x - 7) - 2(y - 3) - (z - 9) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x - 2y - z - 6 = 0$$

Gọi (β) là mặt phẳng chứa (d_2) và cùng phương với $\vec{a}'_1$. Ta có :

$$\vec{n}_\beta = \left(\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-5, -34, 11)$$

Ta có : $B(3, 1, 1) \in (d_2) \Rightarrow B(3, 1, 1) \in (\beta)$

Phương trình của (β) là : $-5(x - 3) - 34(y - 1) + 11(z - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 5x + 34y - 11z - 38 = 0$$

Ta có : $(\alpha) \cap (\beta) = (\Delta)$

Vậy phương trình của đường vuông góc chung (Δ) của (d_1) và (d_2) là :

$$(\Delta) \begin{cases} 3x - 2y - z - 6 = 0 \\ 5x + 34y - 11z - 38 = 0 \end{cases}$$

Đề 13 Lập phương trình của đường thẳng qua điểm $M(-4, 5, 3)$ và cắt hai đường thẳng :

$$(d_1) : \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$$

$$(d_2) : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$$

Giải

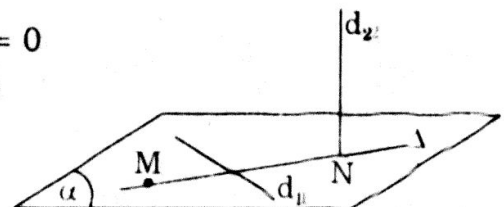
Phương trình tổng quát của (d_1) là :

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} \\ \frac{x+1}{3} = \frac{z-2}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 11 = 0 \\ x + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d_1) và M .

Phương trình (α) có dạng :

$$m(2x + 3y + 11) + n(x + 3z - 5) = 0$$



h.6.11

$$M(-4, 5, -3) \in (\alpha) \Rightarrow 18m = 0 \Rightarrow m = 0$$

Cho $n = 1$

Vậy : $(\alpha) : x + 3z - 5 = 0$

Phương trình tham số của (d_2) :
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$$

(d_2) cắt (α) tại $N \Rightarrow (2 + 2t) + 3(1 - 5t) - 5 = 0$

$$\Rightarrow -13t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow N \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{MN} = (6, -6, -2)$$

$$\vec{a}_\alpha = (3, -3, -1)$$

Phương trình của đường thẳng (Δ) qua M và cắt (d_2) tại N là :

$$\frac{x+4}{3} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-3}{-1}$$

Ta có (Δ) và (d_1) đồng phẳng (α) và $\vec{a}_\Delta \neq k \vec{a}_{d_1} \Rightarrow (\Delta)$ cắt (d_1)

Vậy (Δ) chính là đường thẳng qua điểm M và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) .

Đề 14 Xác định tọa độ của điểm P' đối xứng với điểm $P(-3, 1, -1)$ qua đường thẳng : $(d) : \begin{cases} 4x - 3y - 13 = 0 \\ y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$

Giải

Cách 1 :

Ta có : $\vec{a}_d = \left(\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (6, 8, 4)$

$$\vec{a}'_d = (3, 4, 2)$$

Gọi (α) là mặt phẳng qua P và vuông góc với (d) ta có :

$$\vec{n}_\alpha = \vec{a}'_d = (3, 4, 2)$$

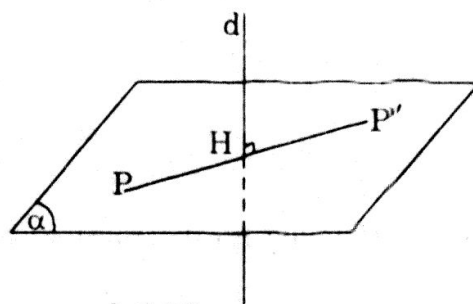
Phương trình của (α) là :

$$3(x + 3) + 4(y - 1) + 2(z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 4y + 2z + 7 = 0$$

Phương trình tham số của (d) là :

$$\begin{cases} x = \frac{13}{4} + \frac{3t}{4} \\ y = t \\ z = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases}$$



h.6.12

$$(d) \text{ cắt } (\alpha) \text{ tại } H \Rightarrow 3\left(\frac{13}{4} + \frac{3t}{4}\right) + 4t + 2\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}t\right) + 7 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{29}{4}t = -\frac{87}{4} \Rightarrow t_{II} = -3$$

$$\text{Vậy tọa độ điểm H là : } \begin{cases} x = \frac{13}{4} - \frac{9}{4} = 1 \\ y = -3 \\ z = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow H(1, -3, 1)$$

P' đối xứng với P qua (d) $\Leftrightarrow$ H là trung điểm của PP'

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_P + x_{P'}}{2} = x_H \\ \frac{y_P + y_{P'}}{2} = y_H \\ \frac{z_P + z_{P'}}{2} = z_H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{P'} = 5 \\ y_{P'} = -7 \\ z_{P'} = 3 \end{cases}$$

Vậy tọa độ P' là : (5, -7, 3)

Cách 2 :

$M \in (d)$

$$\text{Cho } x_M = 3t + 1 \Rightarrow y_M = 4t - 3; \quad z_M = 2t + 1$$

Vậy : $M(3t + 1, 4t - 3, 2t + 1)$

$$PM^2 = (3t + 4)^2 + (4t - 4)^2 + (2t + 2)^2 = 29t^2 + 36$$

M là hình chiếu của P lên (d) $\Leftrightarrow PM^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow t = 0$$

Vậy ta được : $M(1, -3, 1)$

M là trung điểm PP' $\Rightarrow P'(5, -7, 3)$

Đề 15 Trong không gian cho các điểm $A(-3, -2, 6)$, $B(-2, 4, 4)$.

Hãy tính độ dài đường cao OO' của tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

Giải

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với AB . Ta có :

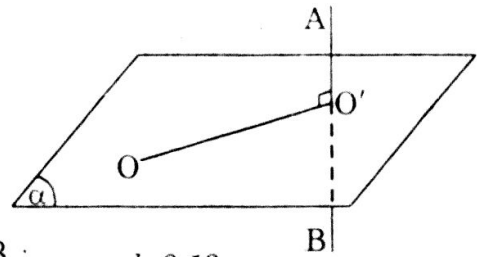
$$\vec{n}_\alpha = \vec{AB} = (1, 6, -2)$$

Phương trình của mặt phẳng (α) là :

$$x + 6y - 2z = 0$$

Phương trình tham số của đường thẳng AB :

$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = -2 + 6t \\ z = 6 - 2t \end{cases}$$



h.6.13

$$(\alpha) \text{ cắt } AB \text{ tại } O' \Rightarrow (-3 + t) + 6(-2 + 6t) - 2(6 - 2t) = 0 \Rightarrow t = \frac{27}{41}$$

$$\Rightarrow O' \left(-\frac{96}{41}, \frac{80}{41}, \frac{192}{41} \right)$$

$$\Rightarrow OO' = \sqrt{\left(\frac{96}{41}\right)^2 + \left(\frac{80}{41}\right)^2 + \left(\frac{192}{41}\right)^2} = \frac{1}{41} \sqrt{52480}$$

$$\text{Vậy : } OO' = \sqrt{\frac{1280}{41}}$$

Đề 16 Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng :

$$(d_1) \begin{cases} 2x - z - 1 = 0 \\ -x - y + 4 = 0 \end{cases} ; \quad (d_2) \begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ 3y - 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Phương trình tham số của } (d_1) : \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

$$\text{Phương trình tham số của } (d_2) : \begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{t}{3} \\ y = t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d_1) và cùng phương với (d_2) , Mặt phẳng (α) có 2 vectơ chỉ phương là :

$$\vec{a}_{d_1} = (1, -1, 2); \quad \vec{a}_{d_2} = \left(-\frac{1}{3}, 1, 1\right)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} \right) = \left(-3, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\vec{n}'_\alpha = (9, 5, -2)$$

Lấy điểm $M(0, 4, -1) \in (d_1)$

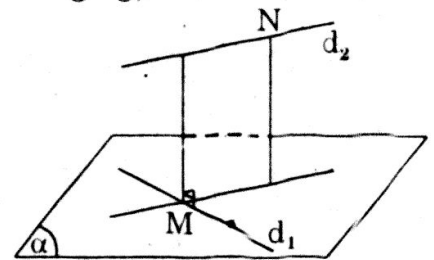
Ta có : $M(0, 4, -1) \in (\alpha)$

∴ Phương trình của (α) là :

$$9(x - 0) + 5(y - 4) - 2(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 9x + 5y - 2z - 22 = 0$$

Lấy điểm $N\left(\frac{2}{3}, 0, -2\right) \in (d_2)$

$$\text{Ta có : } d(d_1, d_2) = d(N, \alpha) = \frac{|6 + 4 - 22|}{\sqrt{81 + 25 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{110}}$$

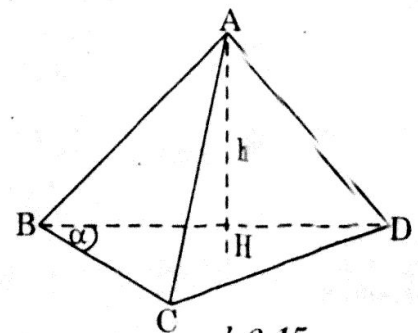


h.6.14

Đề 17 Tính chiều dài đường cao hạ từ đỉnh A của tứ diện có bốn đỉnh là :

$$A(2, 3, 1), \quad B(4, 1, -2),$$

$$C(6, 3, 7), \quad D(-5, -4, 8).$$



h.6.15

Giải

$$\text{Ta có : } \vec{BC} = (2, 2, 9); \quad \vec{BD} = (-9, -5, 10)$$

Đặt $\alpha = (B, C, D)$

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 10 & -9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -9 & -5 \end{vmatrix} \right) = (65, -101, 8)$$

Phương trình mặt phẳng (α) là : $65(x - 4) - 101(y - 1) + 8(z + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow 65x - 101y + 8z - 143 = 0$$

$$\text{Ta có : } h = d(A, \alpha) = \frac{|65(2) - 101(3) + 8(1) - 143|}{\sqrt{65^2 + 101^2 + 8^2}} = \frac{308}{\sqrt{14490}}$$

Vậy chiều dài đường cao hạ từ đỉnh A của tứ diện ABCD là :

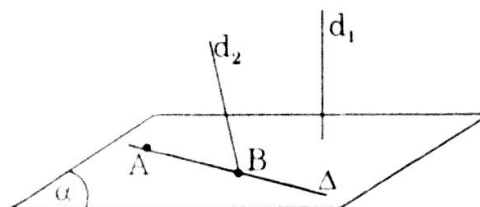
$$h = \frac{308}{\sqrt{14490}}.$$

Đề 18 Lập phương trình đường thẳng qua điểm A(0, 1, 1) vuông góc với đường thẳng :

$$(d_1) : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$$

và cắt đường thẳng :

$$(d_2) : \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+1=0 \end{cases}$$



h.6.16

Giải

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (d_1) .

Ta có : $\vec{n}_{(\alpha)} = \vec{a}_{d_1} = (3, 1, 1)$

Phương trình của (α) là :

$$3(x) + (y-1) + (z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x + y + z - 2 = 0$$

Đường thẳng (d_2) cắt (α) tại B

Tọa độ B(x, y, z) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+1=0 \\ 3x+y+z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

Đường thẳng (Δ) cần tìm chính là đường thẳng AB. Ta có :

$$\vec{a}_{\Delta} = \vec{AB} = (-1, 1, 2)$$

Phương trình của (Δ) là : $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$.

Đề 19 Cho hai điểm A(1, 2, -1), B(7, -2, 3) và đường thẳng d có phương

$$\text{trình : } \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}.$$

1. Chứng minh rằng đường thẳng (d) và đường thẳng AB cùng nằm trong một mặt phẳng.

2. Tìm điểm I $\in$ (d) sao cho AI + BI nhất.

Giải

1. Ta có : $\vec{AB} = (6, -4, 4)$

$$\vec{a}_d = (3, -2, 2)$$

$$\vec{AB} = 2\vec{a}_d \Rightarrow AB \text{ và } d \text{ cùng phương}$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng AB và đường thẳng (d) cùng nằm trong một mặt phẳng.

2. Gọi M là trung điểm của AB.

Ta có : $M(4, 0, 1)$.

Do $AB \parallel d$ nên $(IA + IB)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow I = \text{Ch}_d M$

Phương trình tham số của đường thẳng (d) :
$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

$$N(-1 + 3t, 2 - 2t, 2 + 2t) \in (d)$$

$$MN^2 = (5 - 3t)^2 + (2 - 2t)^2 + (1 + 2t)^2$$

$$f(t) = 17t^2 - 34t + 30$$

$$f'(t) = 34t - 34; \quad f'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$$

$$N \equiv I \quad \Leftrightarrow \quad MN \text{ nhỏ nhất} \quad \Leftrightarrow \quad t = 1.$$

Vậy điểm I cần tìm là $I(2, 0, 4)$.

Đề 20 Tìm tập hợp các điểm M trong không gian cách đều ba điểm $A(1, 1, 1)$; $B(-1, 2, 0)$, $C(2, -3, 2)$.

Giải

Xét điểm $M(x, y, z)$
$$\begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x - 4y + z - 7 = 0 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm M trong không gian cách đều 3 điểm A, B, C là đường thẳng (Δ) có phương trình :

$$(\Delta) \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x - 4y + z - 7 = 0 \end{cases}$$

Đề 21

1. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng sau đây vuông góc với nhau :

$$(d_1) : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$$

$$(d_2) : \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$$

2. Hai đường thẳng đó có cắt nhau không ?

Giải1. Ta có : $\vec{a}_{d_1} = (1, -2, 3)$

$$\vec{a}_{d_2} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -8 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = (7, 14, 7) = (1, 2, 1)$$

$$\vec{a}_{d_1} \cdot \vec{a}_{d_2} = 1 - 4 + 3 = 0$$

Vậy : $d_1 \perp d_2$.2. Phương trình tham số của (d_1) :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3t \end{cases}$$
Thay vào phương trình tổng quát của (d_2)

$$\begin{cases} 3t + (1 - 2t) - 5(3t) + 1 = 0 \\ 2t + 3(1 - 2t) - 8(3t) + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14t + 2 = 0 \\ 24t + 6 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm.

Vậy (d_1) và (d_2) không cắt nhau.**Đề 22**Mặt phẳng (P) được xác định bởi hệ phương trình chứa tham số u, v .

$$\begin{cases} x = 1 + v \\ y = 1 + 4u + 2v \\ z = u - v \end{cases}$$

Đường thẳng (d) được xác định bởi hệ phương trình chứa tham số t .

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 7 - 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

Chứng minh rằng đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (P) .

Giải

Ta có : (P) $\begin{cases} x = 1 + v \\ y = 1 + 4u + 2v \\ z = u - v \end{cases}$ (1)
(2)
(3)

$$(1) \Rightarrow v = x - 1$$

$$(3) \Rightarrow u = z + x - 1$$

$$(2) \Rightarrow y = 1 + 4(z + x - 1) + 2(x - 1)$$

$$\Rightarrow 6x - y + 4z - 5 = 0$$

Ta có phương trình của (P) là : $6x - y + 4z - 5 = 0$ (4)

Thay $x = 2 - 3t$, $y = 7 - 2t$, $z = -1 + 4t$ vào (4) ta được :

$$6(2 - 3t) - (7 - 2t) + 4(-1 + 4t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 0t = 4$$

Phương trình vô nghiệm : $(d) \cap (P) = \emptyset$

Vậy đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (P).

Đề 23 Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho hai đường thẳng (Δ_1) , (Δ_2) có phương trình tham số :

$$(\Delta_1) \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} ; \quad (\Delta_2) \begin{cases} x = 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = t' \end{cases}$$

1. Chứng minh rằng hai đường thẳng (Δ_1) , (Δ_2) chéo nhau.
2. Viết phương trình các mặt phẳng (P), (Q) song song với nhau và lần lượt đi qua (Δ_1) và (Δ_2) .
3. Tính khoảng cách giữa (Δ_1) , (Δ_2) .

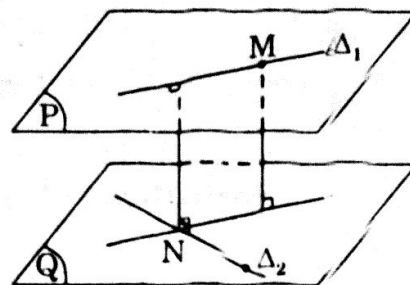
Giải

1. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (Δ_2) và cùng phương với (Δ_1) . Mặt phẳng (Q) có 2 vectơ chỉ phương là :

$$\vec{a}_{\Delta_1} = (-1, 1, -1)$$

$$\vec{a}_{\Delta_2} = (2, -1, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_Q = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (0, -1, -1)$$



h.6.17

$$\vec{n}_Q = (0, 1, 1)$$

Lấy điểm $N(0, 1, 0) \in (\Delta_2) \Rightarrow N(0, 1, 0) \in (Q)$

Phương trình của (Q) là : $(y - 1) + (z) = 0$

$$\Leftrightarrow y + z - 1 = 0$$

Lấy điểm $M(1, 0, 0) \in \Delta_1$ ta có : $M \notin (Q)$

Vậy hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) chéo nhau.

2. Gọi (P) là mặt phẳng chứa (Δ_1) và song song với (Δ_2) .

Ta có : $(P) \parallel (Q) \Rightarrow (P)$ đi qua $M(1, 0, 0)$ và có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n}_P = \vec{n}_Q = (0, 1, 1)$$

Vậy phương trình của (P) là : $y + z = 0$

Và theo câu (1.) phương trình của (Q) là : $y + z - 1 = 0$.

$$3. \text{ Ta có : } d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M, Q) = \frac{|0 + 0 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 0}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy khoảng cách giữa (Δ_1) và (Δ_2) là : $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

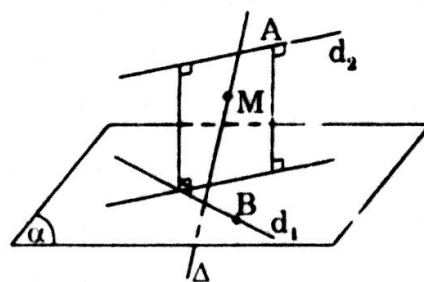
Bài 24 Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình :

$$(d_1) \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z + 4 = 0 \end{cases} ; \quad (d_2) \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

1. Chứng tỏ rằng đó là hai đường thẳng chéo nhau.

2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

3. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2, 3, 1)$ và cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) .



h.6.18

Giải

1. Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d_1) và cùng phương với (d_2) . Ta có:

$$\vec{a}_{d_1} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1, -1, -2)$$

$$\vec{a}_{d_2} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (3, -1, 1)$$

Ta lấy điểm $B(0, 0, -4) \in d_1$

$$A(1, 0, 2) \in d_2$$

$$\vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-3, -7, 2)$$

Phương trình của (α) là :

$$(-3)(x) - 7(y) + 2(z + 4) = 0 \Leftrightarrow 3x + 7y - 2z - 8 = 0$$

$A \notin (\alpha) \Rightarrow (d_1)$ và (d_2) chéo nhau.

$$2. \text{ Ta có : } d(d_1, d_2) = d(A, \alpha) = \frac{|3 + 0 - 4 - 8|}{\sqrt{9 + 49 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{62}}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) là : $\frac{9}{\sqrt{62}}$.

3. Gọi (P) là mặt phẳng qua (d_1) và M

Gọi (Q) là mặt phẳng qua (d_2) và M

Phương trình của (P) có dạng :

$$(P) : m(x + y) + n(x - y + z + 4) = 0$$

$$M(2, 3, 1) \in (P) \Rightarrow m(2 + 3) + n(2 - 3 + 1 + 4) = 0$$

$$\Rightarrow 5m + 4n = 0$$

$$\text{Cho } m = 4 \Rightarrow n = -5$$

$$\Rightarrow (P) : 4(x + y) - 5(x - y + z + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 9y + 5z + 20 = 0$$

Phương trình của (Q) có dạng :

$$(Q) : m(x + 3y - 1) + n(y + z - 2) = 0$$

$$M(2, 3, 1) \in (Q) \Rightarrow m(2 + 9 - 1) + n(3 + 1 - 2) = 0$$

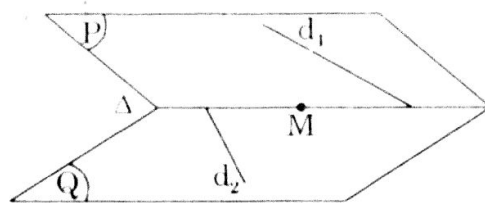
$$\Rightarrow 10m + 2n = 0$$

$$\text{Cho } m = 1 \Rightarrow n = -5$$

$$\Rightarrow (Q) : (x + 3y - 1) - 5(y + z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y - 5z + 9 = 0$$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và cắt (d_1) và (d_2) . Ta có :



h.6.19

$$\Delta = (P) \cap (Q)$$

$$= \Delta \begin{cases} x - 9y + 5z + 20 = 0 \\ x - 2y - 5z + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{a}_\Delta = \left(\begin{vmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (55, 10, 7)$$

$\vec{a}_\Delta$ khác phương với $\vec{a}_{d_1}$ và $\vec{a}_{d_2}$

Vậy Δ chính là đường thẳng cần tìm.

Đề 25 Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d(k)$ có phương trình :

$$\begin{cases} x + kz - k = 0 \\ (1 - k)x - ky = 0 \end{cases}$$

Với k là một số tùy ý khác 0. Chứng minh rằng khi k thay đổi :

1. Đường thẳng $d(k)$ luôn đi qua một điểm cố định.
2. Đường thẳng $d(k)$ luôn nằm trên một mặt phẳng cố định.

Giải

1. Gọi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ là điểm cố định.

Ta có: $M_0 \in d(k) \quad \forall k \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + kz_0 - k = 0 \\ (1 - k)x_0 - ky_0 = 0 \end{cases} \quad \forall k \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k(z_0 - 1) + x_0 = 0 \\ -k(x_0 + y_0) + x_0 = 0 \end{cases} \quad \forall k \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_0 - 1 = 0 \\ x_0 = 0 \\ x_0 + y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 1 \end{cases}$$

Vậy $d(k)$ luôn đi qua điểm cố định $M_0(0, 0, 1)$.

2. $\forall M(x, y, z) \in d(k)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + kz - k = 0 \\ (1 - k)x - ky = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\quad \quad \quad (2)$$

$$\Rightarrow kx + ky + kz - k = 0 \quad (\text{lấy (1) - (2)})$$

$$\Rightarrow k(x + y + z - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x + y + z - 1 = 0 \quad (k \neq 0)$$

$$\Rightarrow M(x, y, z) \in (\alpha)$$

Vậy đường thẳng $d(k)$ luôn nằm trên một mặt phẳng cố định :

$$(\alpha) : x + y + z - 1 = 0.$$

Đề 26

Trong không gian với hệ tọa độ trục chuẩn Oxyz, cho đường thẳng (d) xác định bởi hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - z \sin \alpha + \cos \alpha = 0 \\ y - z \cos \alpha - \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

Trong đó α là tham số.

1. Xác định vectơ chỉ phương của đường thẳng (d).
2. Chứng minh rằng đường thẳng (d) tạo với trục Oz một góc không phụ thuộc vào α .
3. Viết phương trình hình chiếu (d') của (d) lên mặt phẳng Oxy.
4. Chứng minh rằng với mọi giá trị α đường thẳng (d') luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định thuộc mặt phẳng Oxy.

Giải

$$1. \text{ Ta có : } \vec{a}_d = \left(\begin{vmatrix} 0 & -\sin \alpha \\ 1 & -\cos \alpha \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\sin \alpha & 1 \\ -\cos \alpha & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (\sin \alpha, \cos \alpha, 1).$$

$$2. \text{ Ta có : } \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

$$\cos(\widehat{d, Oz}) = |\cos(\vec{a}_d, \vec{e}_3)| = \frac{|0 + 0 + 1|}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (\widehat{d, Oz}) = 45^\circ$$

Vậy đường thẳng (d) luôn tạo với trục Oz một góc bằng 45° .

3. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua (d) và vuông góc với mặt phẳng (Oxy)

(P) có 2 vectơ chỉ phương là :

$$\vec{a}_d = (\sin \alpha, \cos \alpha, 1)$$

$$\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_P = \left(\begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & \sin \alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (\cos \alpha, -\sin \alpha, 0)$$

Lấy điểm $A(-\cos \alpha, \sin \alpha, 0) \in (d) \Rightarrow A \in (P)$

Phương trình của (P) là :

$$\cos \alpha (x + \cos \alpha) - \sin \alpha (y - \sin \alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cos \alpha - y \sin \alpha + 1 = 0$$

Ta có : $(d') = (P) \cap (xOy)$

Vậy phương trình của đường thẳng (d') hình chiếu của (d) xuống (xOy) là :

$$(d') \begin{cases} x \cos \alpha - y \sin \alpha + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

4. Trong mặt phẳng tọa độ (xOy) đường thẳng (d') có phương trình :

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha + 1 = 0$$

$$\text{Ta có : } d(O, d') = \frac{|0 + 0 + 1|}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1$$

Vậy (d') luôn tiếp xúc với đường tròn cố định $(C) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ có tâm

là O và bán kính $R = 1$ trong mặt phẳng Oxy .

ĐỀ 27 Trong không gian $Oxyz$ cho họ đường thẳng (d) có phương trình :

$$\begin{cases} x - my + z - m = 0 \\ mx + y - mz - 1 = 0 \end{cases}$$

1. Viết phương trình hình chiếu (d') của (d) lên mặt phẳng Oxy .

2. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng (d') luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định trong một mặt phẳng Oxy .

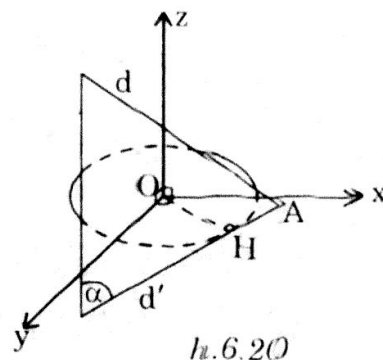
Giải

1. Tọa độ giao điểm A của (d) và mặt phẳng (xOy) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - my + z - m = 0 & (1) \\ mx + y - mz - 1 = 0 & (2) \\ z = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2m}{1+m^2} \\ y = \frac{1-m^2}{1+m^2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Vậy : $A\left(\frac{2m}{1+m^2}, \frac{1-m^2}{1+m^2}, 0\right)$.



h.6.20

Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (xOy) .

Ta có hai vectơ chỉ phương của (α) là :

$$\vec{a}_d = \left(\begin{vmatrix} -m & 1 \\ 1 & -m \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -m & m \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{vmatrix} \right) = (m^2 - 1, 2m, m^2 + 1)$$

$$\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} 2m & m^2 + 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m^2 + 1 & m^2 - 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m^2 - 1 & 2m \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{n}_\alpha = (2m, 1 - m^2, 0)$$

Phương trình của (α) là :

$$2m\left(x - \frac{2m}{1+m^2}\right) + (1 - m^2)\left(y - \frac{1-m^2}{1+m^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2mx + (1 - m^2)y - (m^2 + 1) = 0$$

Ta có : $(\alpha) \cap (xOy) = (d')$

Vậy phương trình hình chiếu (d') của (d) lên mặt phẳng (Oxy) là

$$(d') : \begin{cases} 2mx + (1 - m^2)y - (m^2 + 1) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

2. Trong mặt phẳng tọa độ (xOy) phương trình của (d') là :

$$2mx + (1 - m^2)y - (m^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow d(O, d') = \frac{m^2 + 1}{\sqrt{4m^2 + (1 - m^2)^2}} = 1$$

Vậy khi m thay đổi, đường thẳng d' luôn tiếp xúc với đường tròn tâm O bán kính $R = 1$ trong mặt phẳng (Oxy) .

ĐỀ 28

Trong không gian cho hai đường thẳng (Δ_1) , (Δ_2) có phương trình :

$$(\Delta_1) : \begin{cases} x - 8z + 23 = 0 \\ y - 4z + 10 = 0 \end{cases} ; \quad (\Delta_2) : \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

- Viết phương trình các mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và lần lượt đi qua (Δ_1) và (Δ_2) .
- Tính khoảng cách giữa (Δ_1) và (Δ_2) .
- Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với trục Oz và cắt cả hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) .

Giải

1. Phương trình của (P) có dạng :

$$(x - 8z + 23) + m(y - 4z + 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + my + (-8 - 4m)z + 23 + 10m = 0$$

Phương trình của (Q) có dạng :

$$(x - 2z - 3) + p(y + z + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + py + (-2 + 2p)z + 2p - 3 = 0$$

$$(P) // (Q) \Leftrightarrow \frac{1}{1} = \frac{m}{p} = \frac{-8 - 4m}{-2 - 2p} \neq \frac{23 + 10m}{-3 + 2p}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = p \\ -6 - 4m = 2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ p = -1 \end{cases}$$

Vậy phương trình của các mặt phẳng (P) và (Q) là :

$$(P) : x - y - 4z + 13 = 0$$

$$(Q) : x - y - 4z - 5 = 0$$

2. Chọn $A(-13, 0, 0) \in (P)$

$$\text{Ta có : } d(\Delta_1, \Delta_2) = d(A, Q) = \frac{|-13 + 0 + 0 - 5|}{\sqrt{1 + 1 + 16}} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy : } d(\Delta_1, \Delta_2) = 3\sqrt{2}.$$

3. Gọi (α) là mặt phẳng chứa Δ_1 và song song với Oz.

Phương trình (α) có dạng :

$$x + my + (-8 - 4m)z + 23 + 10m = 0$$

$$\vec{n}_\alpha = (1, m, -8 - 4m)$$

$$\vec{n}_\alpha \perp \vec{e}_3 \Rightarrow -8 - 4m = 0 \Rightarrow m = -2$$

Phương trình của (α) là : $x - 2y + 3 = 0$

Gọi (β) là mặt phẳng chứa (Δ_2) và song song với Oz. Phương trình (β) có dạng :

$$x + py + (-2 + 2p)z + 2p - 3 = 0$$

$$\vec{n}_\beta = (1, p, 2p - 2)$$

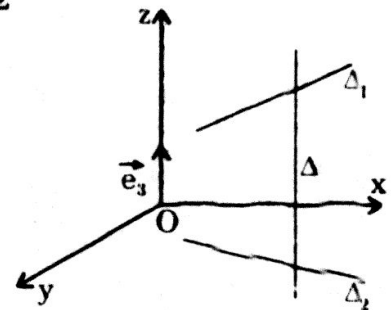
$$\vec{n}_\beta \perp \vec{e}_3 \Rightarrow 2p - 2 = 0 \Rightarrow p = 1$$

Phương trình của (β) là : $x + y - 1 = 0$

Gọi (Δ) là đường thẳng song song với trục Oz và cắt (Δ_1) và (Δ_2) . Ta có :

$$\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$$

Vậy phương trình của (Δ) là :
$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$



h.6.21

Đề 29 Trong không gian cho mặt phẳng (P) có phương trình : $x + y + z = 0$

và đường thẳng (d) có phương trình :
$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 3x - 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

1. Xác định giao điểm A của đường thẳng (d) với mặt phẳng (P) .
2. Viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng (d) và nằm trong mặt phẳng (P) .

Giải

1. Giao điểm A của (P) và (d) có tọa độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \\ 3x - 2z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Vậy : $A(1, 1, -2)$.

$$2. \text{ Ta có : } (d) \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 3x - 2z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ z = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \end{cases}$$

Đặt $x = 2t$. Phương trình tham số của (d) là :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{3}{2} - t \\ z = -\frac{7}{2} + 3t \end{cases}$$

Gọi (Q) là mặt phẳng vuông góc với (d) tại A. Ta có :

$$\vec{n}_Q = \vec{a}_d = (2, -1, 3).$$

Phương trình của (Q) là : $2(x - 1) - (y - 1) + 3(z + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - y + 3z + 5 = 0$$

Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua điểm A vuông góc với đường thẳng (d) và nằm trong mặt phẳng (P). Ta có :

$$(\Delta) = (P) \cap (Q)$$

Vậy phương trình của (Δ) là : $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$

Đề 30 Trong không gian Oxyz cho các đường thẳng :

$$(\Delta) \begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + z + 1 = 0 \end{cases} ; \quad (d) \begin{cases} x = 2 + at \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

1. Với a cho trước. Hãy xác định phương trình mặt phẳng (P) đi qua (Δ) và song song với (d)
2. Xác định a để tồn tại mặt phẳng (Q) đi qua (Δ) và vuông góc với (d).

Giải

1. Phương trình của (P) có dạng :

$$(x + 2y - 3z + 1) + m(2x - 3y + z + 1) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (1 + 2m)x + (2 - 3m)y + (-3 + m)z + 1 + m = 0$$

$$\vec{n}_P = (1 + 2m, 2 - 3m, -3 + m)$$

$$\vec{a}_d = (a, 2, -3)$$

$$\begin{aligned}
 (P) // (d) & \Leftrightarrow \vec{n}_P \perp \vec{a}_d \\
 & \Leftrightarrow a(1 + 2m) + 2(2 - 3m) - 3(-3 + m) = 0 \\
 & \Leftrightarrow m(2a - 9) + a + 13 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{a + 13}{9 - 2a} \quad \left(a \neq \frac{9}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Thay vào (1) ta được :

$$(x + 2y - 3z + 1) + \frac{a + 13}{9 - 2a}(2x - 3y + z + 1) = 0$$

Vậy phương trình của mặt phẳng (P) là :

$$35x - 7(a + 3)y + 7(a - 2)z + 10 - a = 0.$$

2. Phương trình của (Q) cũng có dạng :

$$(1 + 2m)x + (2 - 3m)y + (-3 + m)z + 1 + m = 0$$

$$\begin{aligned}
 (Q) \perp (d) & \Leftrightarrow \vec{n}_Q \text{ cùng phương với } \vec{a}_d \\
 & \Leftrightarrow \frac{1 + 2m}{a} = \frac{2 - 3m}{2} = \frac{-3 + m}{-3} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2 - 3m}{2} = \frac{-3 + m}{-3} \\ \frac{2 - 3m}{2} = \frac{1 + 2m}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ a = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy với $a = 1$ thì tồn tại mặt phẳng (Q) đi qua (Δ) và vuông góc với (d)

(Q) có phương trình là :

$$x + 2y - 3z + 1 = 0.$$

Đề 31 Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz. Xét ba điểm $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ với $a, b, c > 0$.

- Viết phương trình mặt phẳng (ABC).
- Xác định tọa độ của điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên mặt phẳng (ABC). Tính độ dài OH.
- Tính diện tích tam giác ABC.
- Giả sử a, b, c , thay đổi nhưng luôn luôn thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = k^2$ với $k > 0$ cho trước. Khi nào thì tam giác ABC có diện tích lớn nhất ? Chứng tỏ rằng khi đó đoạn OH cũng có độ dài lớn nhất.

Giải

1. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 3 điểm A, B, C (α) có 2 vectơ chỉ phương là :

$$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{\alpha} = \left(\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -a \\ c & -a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} \right) = (bc, ac, ab)$$

Phương trình của (α) là : $bc(x + a) + acy + abz = 0$

$$\Leftrightarrow bcx + acy + abz - abc = 0$$

2. Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua O và vuông góc với (ABC) . Ta có :

$$\vec{a}_{\Delta} = \vec{n}_{\alpha} = (bc, ac, ab)$$

$$\text{Phương trình tham số của } (\Delta) \text{ là : } \begin{cases} x = bct \\ y = act \\ z = abt \end{cases}$$

$$H \in (ABC) \Rightarrow bcx_H + acy_H + abz_H - abc = 0$$

$$\Rightarrow (b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)t_H = abc$$

$$\Rightarrow t_H = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}$$

Vậy tọa độ của điểm H, hình chiếu của gốc tọa độ lên mặt phẳng (ABC) là :

$$\begin{cases} x_H = \frac{ab^2c^2}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \\ y_H = \frac{ba^2c^2}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \\ z_H = \frac{ca^2b^2}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \end{cases}$$

$$OH = \sqrt{x_H^2 + y_H^2 + z_H^2} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

$$3. \quad S = S_{ABC} = \frac{3V_{OABC}}{OH} = \frac{abc}{2OH} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

$$4. \quad 4S^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

$$\text{Ta có : } a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^4 + b^4 + c^4$$

$$\Rightarrow 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \leq (a^2 + b^2 + c^2)^2 = k^4$$

$$\Rightarrow S^2 \leq \frac{k^4}{12} \quad \Rightarrow \quad S \leq \frac{k^2\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{k^2\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{k\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Ta có : } OH^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

Theo Côsi :

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 9$$

$$\Rightarrow k^2 \left(\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2} \right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{OH^2} \geq 9 \Rightarrow OH^2 \leq \frac{k^2}{9}$$

$$OH \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow OH = \frac{k}{3} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{k\sqrt{3}}{3}$$

Vậy khi tam giác ABC có diện tích lớn nhất thì OH cũng có độ dài lớn nhất.

Đề 32 Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Biết A'(0, 0, 0), B'(a, 0, 0), D'(0, a, 0), A(0, 0, a). Trong đó a > 0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và B'C'.

- Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua M và song song với hai đường thẳng AN và BD'.
- Tính thể tích tứ diện ANBD'.
- Tính góc và khoảng cách giữa các đường thẳng AN và BD'.

Hướng dẫn

- (α) có 2 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AN}$ từ đó tính tọa độ $\vec{n}_\alpha$.

Phương trình (α) là :

$$x + 4y + 3z - \frac{7}{2}a = 0.$$

2.

$$V_{ANBD} = \frac{1}{3} S_{ABD} \times h$$

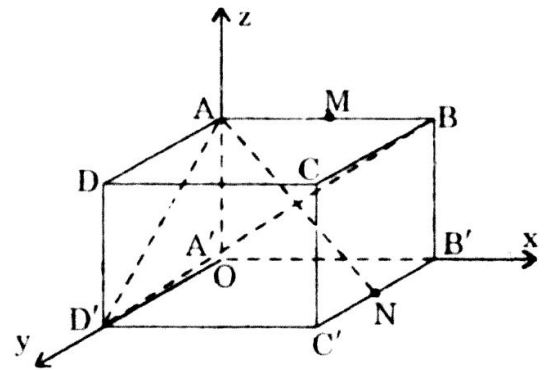
$$h = d(N, ABD') = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

$$V_{ANBD} = \frac{a^3}{12}.$$

3.

$$\widehat{(AN, BD')} = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right).$$

$$d(AN, BD') = \frac{a}{\sqrt{26}}.$$



h.6.22

ĐI 33

Trong không gian với hệ tọa độ trục chuẩn, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $A'(0, 0, 0)$, $B'(a, 0, 0)$, $D'(0, b, 0)$, $A(0, 0, c)$. Trong đó $a, b, c > 0$. Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, B'C', C'D', DD'$.

1. Viết phương trình tham số của hai đường thẳng PR, QS .
2. Xác định a, b, c để hai đường thẳng PR, QS vuông góc với nhau.
3. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng PR, QS cắt nhau.
4. Tính diện tích tứ diện $PQRS$.

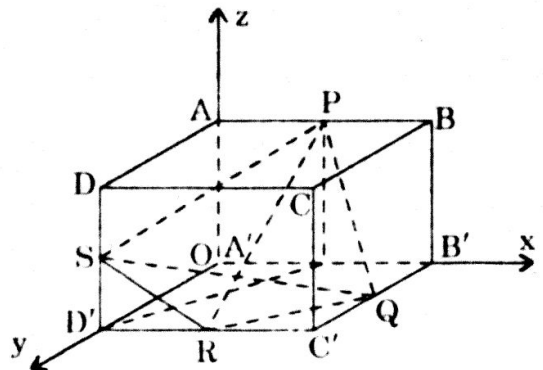
Hướng dẫn

1. PR đi qua điểm $P\left(\frac{a}{2}, 0, c\right)$ và có vectơ chỉ phương là :

$$\vec{PR} = (0, b, -c).$$

Vậy phương trình tham số của PR là :

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = bt \\ z = c - ct \end{cases}$$



h.6.23

Tương tự ta lập được phương trình tham số của QS là :

$$\begin{cases} x = a - at \\ y = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}t \\ z = \frac{c}{2}t \end{cases}$$

2. Dùng tính chất : $\vec{PR} \cdot \vec{QS} = 0$.

3. $I\left(\frac{a}{2}, \frac{3b}{4}, \frac{c}{4}\right)$.

4. Đặt : $\vec{MP} = \vec{u}$; $\vec{QN} = \vec{v}$

$$S = \frac{1}{2} MP \cdot QN \sin(\angle MP, QN)$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} \quad (1)$$

Áp dụng công thức (1) ta tính được :

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}.$$

Đề 34 Lập phương trình mặt cầu có tâm là $I(1, 4, -7)$, tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha) : 6x + 6y + 7z + 42 = 0$.

Hướng dẫn

- Tính $R = d(I, \alpha)$.
- Phương trình mặt cầu là : $(S) : (x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 7)^2 = 121$.

Đề 35 Lập phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 113 = 0$$

và song song với hai đường thẳng :

$$(d_1) : \frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+13}{2}$$

$$(d_2) : \frac{x+7}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-8}{0}$$

Hướng dẫn

- Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm.
- (α) có cặp vectơ chỉ phương là : $\vec{a}_{d_1}$ và $\vec{a}_{d_2}$
- Tìm tâm I và bán kính của mặt cầu (S).
- Từ $d(I, \alpha) = R$ suy ra phương trình của (α) là :

$$4x + 6y + 5z - 103 = 0 \quad \text{hay} \quad 4x + 6y + 5z + 205 = 0.$$

Đề 36 Lập phương trình của mặt phẳng chứa đường thẳng :

$$\begin{cases} 8x - 11y + 8z - 30 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

và tiếp xúc với mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$

Hướng dẫn

- Tìm tâm I và bán kính R của (S)
- Dùng chùm mặt phẳng để xác định dạng của phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là :

$$(8x - 11y + 8z - 30) + m(x - y - 2z) = 0$$

- Từ điều kiện : $d(I, \alpha) = R$

Suy ra m

- Có 2 mặt phẳng (α) thỏa điều kiện của đề bài là :

$$(\alpha_1) : 3x - 4y + 2z - 10 = 0$$

$$(\alpha_2) : 2x - 3y + 4z - 10 = 0.$$

Đề 37 Lập phương trình của mặt cầu có tâm là $I(2, 3, -1)$ cắt đường thẳng :

$$(d) \begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0 \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{tại hai điểm A, B sao cho } AB = 16.$$

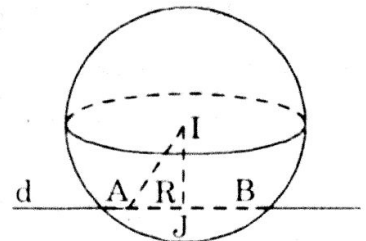
Hướng dẫn

- Tìm hình chiếu J của I xuống đường thẳng (d).

$$R^2 = IJ^2 + \frac{AB^2}{4}$$

Phương trình mặt cầu cần tìm là :

$$(S) : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 289$$



h.6.25

Đề 38 Gọi (T) là giao tuyến của mặt cầu :

$$(S) : (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$$

với mặt phẳng $(\alpha) : 2x - 2y - z + 9 = 0$

Xác định tọa độ tâm và bán kính của (T).

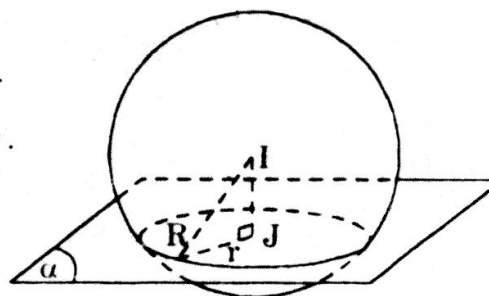
Hướng dẫn

- Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).
- Tìm hình chiếu J của I lên mặt phẳng (α) .
- Gọi r là bán kính của đường tròn (T).
- Lưu ý công thức :

$$r = \sqrt{R^2 - h^2} \quad \text{với } h = d(I, \alpha)$$

h.6.26

- Đường tròn (T) có tâm J(-1, 2, 3) và có bán kính là $r = 8$.



Đề 39 Lập phương trình của mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng :

$$(d) : \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x - 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$$

và tiếp xúc với hai mặt phẳng :

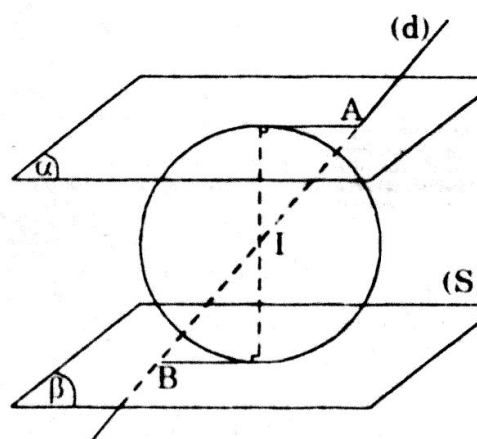
$$(\alpha) : x + 2y - 2z - 2 = 0$$

$$(\beta) : x + 2y - 2z + 4 = 0$$

Hướng dẫn

- Nhận xét rằng $(\alpha) \parallel (\beta)$
- Tìm giao điểm A, B của (d) với (α) và (β)
- Tâm I của mặt cầu là trung điểm của AB
- Tính $R = d(I, \alpha)$
- Phương trình của mặt cầu (S) cần tìm là :

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 1$$



h.6.27

ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC

- 1** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S , có độ dài cạnh đáy bằng a . Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC . Tính theo a diện tích tam giác AMN , biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC) .

(Tuyển sinh ĐH, CĐ 2002 – khối A)

Giải

Gọi K là trung điểm của BC và $I = SK \cap MN$.

$$\text{Từ giả thiết} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, MN \parallel BC$$

$$\Rightarrow I \text{ là trung điểm của } SK \text{ và } MN$$

Ta có: $\triangle SAB = \triangle SAC$

$$\Rightarrow \text{hai trung tuyến tương ứng } AM = AN$$

$$\Rightarrow \triangle AMN \text{ cân tại } A$$

$$\Rightarrow AI \perp MN$$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} (SBC) \perp (AMN) \\ (SBC) \cap (AMN) = MN \\ AI \subset (AMN) \\ AI \perp MN \end{cases}$$

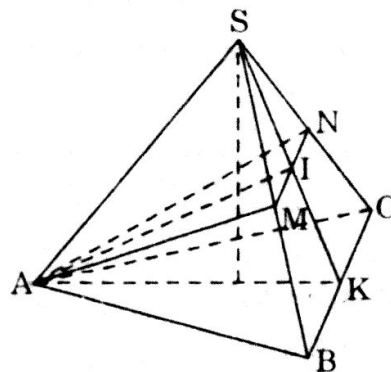
$$\Rightarrow AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SK$$

$$\text{Suy ra: } \triangle SAK \text{ cân tại } A \Rightarrow SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$SK^2 = SB^2 - BK^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{SK}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$$\text{Ta có: } S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}MN \cdot AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{16} \text{ (dvdđt).}$$



Chú ý :

1. Có thể chứng minh $AI \perp MN$ như sau :

$$BC \perp (SAK) \Rightarrow MB \perp (SAK) \Rightarrow MN \perp AI.$$

2. Có thể làm theo phương pháp tọa độ :

Chọn hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz sao cho :

$$K(0; 0; 0), \quad B\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right), \quad C\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right),$$

$$A\left(0; \frac{-a\sqrt{3}}{2}; 0\right), \quad S\left(0; \frac{-a\sqrt{3}}{6}; h\right).$$

trong đó h là độ dài đường cao SH của hình chóp S.ABC.

2 Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho hai đường thẳng :

$$\Delta_1 : \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2 .

b) Cho điểm $M(2; 1; 4)$. Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất.

(Tuyển sinh ĐH, CĐ 2002 – khối A)

Giải

a) Cách 1 :

Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 có dạng :

$$\alpha(x - 2y + z - 4) + \beta(x + 2y - 2z + 4) = 0 \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)x - (2\alpha - 2\beta)y + (\alpha - 2\beta)z - 4\alpha + 4\beta = 0$$

Vậy : $\vec{n}_p = (\alpha + \beta; -2\alpha + 2\beta; \alpha - 2\beta).$

Ta có : $\vec{u}_2 = (1; 1; 2) // \Delta_2$ và $M_2(1; 2; 1) \in \Delta_2$

$$(P) // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_p \cdot \vec{u}_2 = 0 \\ M_2(1; 2; 1) \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ M_2 \notin (P) \end{cases}$$

Vậy : (P) : $2x - z = 0$.

Cách 2 :

Ta có thể chuyển phương trình Δ_1 sang dạng tham số như sau :

Từ phương trình Δ_1 suy ra : $2x - z = 0$.

$$\text{Đặt : } x = 2t' \Rightarrow \Delta_1 : \begin{cases} x = 2t' \\ y = 3t' - 2 \\ z = 4t' \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_1(0; -2; 0) \in \Delta_1, \vec{u}_1 = (2; 3; 4) // \Delta_1.$$

(Ta có thể tìm tọa độ điểm $M_1 \in \Delta_1$ bằng cách cho $x = 0 \Rightarrow y = -2, z = 0$

$$\text{và tính } \vec{u}_1 = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (2; 3; 4).$$

$$\text{Ta có : } \vec{u}_2 = (1; 1; 2) // \Delta_2.$$

Từ đó ta có vectơ pháp của mặt phẳng (P) là :

$$\vec{n}_p = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; 0; -1).$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M_1(0; -2; 0)$ và vuông góc

$$\vec{n}_p = (2; 0; -1) \text{ là : } 2x - z = 0.$$

Mặt khác : $M_2(1; 2; 1) \notin (P)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng cần tìm là : $2x - z = 0$.

b) Cách 1 :

$$H \in \Delta_2 \Rightarrow H(1 + t, 2 + t, 1 + 2t)$$

$$\Rightarrow \vec{MH} = (t - 1; t + 1; 2t - 3)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow MH &= \sqrt{(t - 1)^2 + (t + 1)^2 + (2t - 3)^2} \\ &= \sqrt{6t^2 - 12t + 11} = \sqrt{6(t - 1)^2 + 5} \end{aligned}$$

đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi : $t = 1 \Rightarrow H(2; 3; 3).$

Cách 2 :

$$H \in \Delta_2 \Rightarrow H(1 + t; 2 + t; 1 + 2t).$$

$$MH \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow MH \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{MH} \cdot \vec{u}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(2; 3; 3).$$

3

Cho hình lập phương $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ có cạnh bằng a .

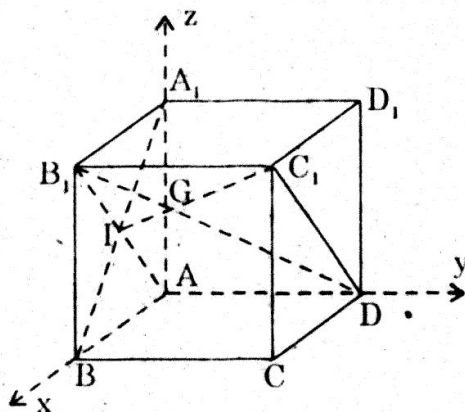
a) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng $A_1 B$ và $B_1 D$.

b) Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh $BB_1, CD, A_1 D_1$.
Tính góc giữa hai đường thẳng MP và $C_1 N$.

(Tuyển sinh ĐH, CD 2002 - khối B)

Giải

a) Tìm khoảng cách giữa $A_1 B$ và $B_1 D$



Cách 1 :

Chọn hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz sao cho :

$$A(0; 0; 0), \quad B(a; 0; 0), \quad D(0; a; 0), \quad A_1(0; 0; a)$$

$$\Rightarrow C(a; a; 0), \quad B_1(a; 0; a), \quad C_1(a; a; a), \quad D_1(0; a; a)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A_1 B} = (a; 0; -a), \quad \overrightarrow{B_1 D} = (-a; a; -a),$$

$$\overrightarrow{A_1 B_1} = (a; 0; 0) \quad \text{và} \quad [\overrightarrow{A_1 B}, \overrightarrow{B_1 D}] = (a^2; 2a^2; a^2).$$

$$\text{Vậy :} \quad d(A_1 B, B_1 D) = \frac{|[\overrightarrow{A_1 B}, \overrightarrow{B_1 D}] \cdot \overrightarrow{A_1 B_1}|}{|[\overrightarrow{A_1 B}, \overrightarrow{B_1 D}]|} = \frac{a^3}{a^2 \sqrt{6}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Cách 2 :

$$\left. \begin{array}{l} A_1 B \perp AB_1 \\ A_1 B \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 B \perp (AB_1 C_1 D) \Rightarrow A_1 B \perp B_1 D$$

$$\text{Tương tự :} \quad A_1 C_1 \perp B_1 D \Rightarrow B_1 D \perp (A_1 B C_1).$$

Gọi $G = B_1 D \cap (A_1 B C_1)$. Do $B_1 A_1 = B_1 B = B_1 C_1 = a$ nên :

$$GA_1 = GB = GC_1$$

$\Rightarrow$ G là trọng tâm tam giác đều A_1BC_1 có cạnh bằng $a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm của A_1B thì IG là đường vuông góc chung của A_1B và B_1D , nên :

$$d(A_1B, B_1D) = IG = \frac{1}{3} C_1B = \frac{1}{3} A_1B \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Chú ý :

Thí sinh có thể viết phương trình mặt phẳng (P) chứa A_1B và song song với B_1D là : $x + 2y + z - a = 0$ và tính khoảng cách từ B_1 (hoặc từ D) tới (P), hoặc viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa B_1D và song song với A_1B là : $x + 2y + z - 2a = 0$ và tính khoảng cách từ A_1 (hoặc từ B) tới (Q).

b) Cách 1 :

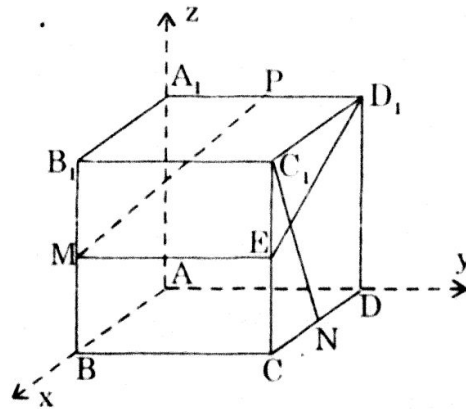
Từ cách 1 của 2a) ta tìm được :

$$M\left(a; 0; \frac{a}{2}\right), \quad N\left(\frac{a}{2}; a; 0\right), \quad P\left(0; \frac{a}{2}; a\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \left(-a; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right), \quad \overrightarrow{NC_1} = \left(\frac{a}{2}; 0; a\right) \Rightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NC_1} = 0$$

Vậy : $MP \perp C_1N$.

Cách 2 :



Gọi E là trung điểm của CC_1 thì $ME \perp (CDD_1C_1) \Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của MP trên (CDD_1C_1) là ED_1 . Ta có :

$$\begin{aligned} \Delta C_1CN &= \Delta D_1C_1E \Rightarrow C_1D_1E = CC_1N = 90^\circ - D_1C_1N \\ &\Rightarrow D_1E \perp C_1N. \end{aligned}$$

Từ đây theo định lí ba đường vuông góc ta có $MP \perp C_1N$.

4

Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC); $AC = AD = 4\text{cm}$; $AB = 3\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

(Tuyển sinh ĐH, CĐ 2002 – khối D)

Giải

Cách 1 :

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông tại A, do đó $AB \perp AC$.

Lại có $AD \perp$ mặt phẳng (ABC) $\Rightarrow AD \perp AB$ và $AD \perp AC$, nên AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau.

Do đó có thể chọn chọn hệ tọa độ Đêcac vuông góc, gốc A sao cho $B(3; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$; $D(0; 0; 4)$. Mặt phẳng (BCD) có phương trình :

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} - 1 = 0$$

Khoảng cách cần tính là : $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}$ (cm).

Cách 2 :

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông tại A, do đó $AB \perp AC$

Lại có $AD \perp$ mặt phẳng (ABC) $\Rightarrow AD \perp AB$ và $AD \perp AC$, nên AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau

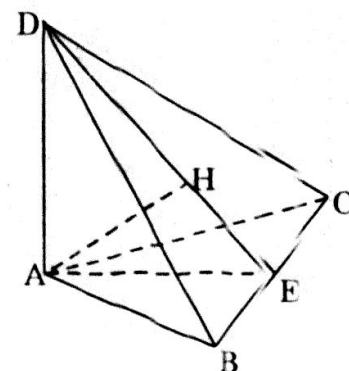
Gọi AE là đường cao của tam giác ABC; AH là đường cao của tam giác ADE thì AH chính là khoảng cách cần tính.

Dễ dàng chứng minh được hệ thức :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

Thay $AC = AD = 4\text{cm}$; $AB = 3\text{cm}$ vào hệ thức trên ta tính được :

$$AH = \frac{6\sqrt{34}}{17} \text{ cm}$$



Cách 3 :

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông tại A, do đó $AB \perp AC$

Lại có $AD \perp$ mặt phẳng (ABC) $\Rightarrow AD \perp AB$ và $AD \perp AC$, nên AB, AC,

AD đôi một vuông góc với nhau

Gọi V là thể tích tứ diện ABCD, ta có :

$$V = \frac{1}{6} \cdot AB \cdot AC \cdot AD = 8$$

Áp dụng công thức : $AH = \frac{3V}{S_{ABCD}}$

với $V = 8$ và $S_{ABCD} = 2\sqrt{34}$ ta tính được : $AH = \frac{6\sqrt{34}}{17} \text{ cm.}$

5 Trong không gian với hệ tọa độ Đécac vuông góc Oxyz, cho mặt phẳng (P) : $2x - y + 2 = 0$ và đường thẳng :

$$d_m : \begin{cases} (2m+1)x + (1-m)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m+1)z + 4m + 2 = 0 \end{cases}$$

Xác định m để đường thẳng d_m song song với mặt phẳng (P).

(Tuyển sinh ĐH, CĐ 2002 – khối D)

Giải

Cách 1 :

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} (2; -1; 0)$.

Đường thẳng d_m có vectơ chỉ phương :

$$\vec{u} ((1-m)(2m+1); -(2m+1)^2; -m(1-m)).$$

Suy ra : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 3(2m+1)$.

$$d_m \text{ song song với (P)} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ d_m \not\subset (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ \exists A \in d_m, A \notin (P) \end{cases}$$

Ta có điều kiện : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

Mặt khác khi $m = -\frac{1}{2}$ thì d_m có phương trình : $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, mọi điểm

$A(0; 1; a)$ của đường thẳng này đều không nằm trong (P), nên điều kiện $\exists A \in d_m, A \notin (P)$ được thỏa mãn.

ĐS : $m = -\frac{1}{2}$.

Cách 2 :

Viết phương trình d_m dưới dạng tham số ta được :

$$\begin{cases} x = (1 - m)(2m + 1)t \\ y = 1 - (2m + 1)^2 t \\ z = -2 - m(1 - m)t \end{cases}$$

$d_m // (P) \Leftrightarrow$ hệ phương trình ẩn t sau :

$$\begin{cases} x = (1 - m)(2m + 1)t \\ y = 1 - (2m + 1)^2 t \\ z = -2 - m(1 - m)t \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{vô nghiệm}$$

$\Leftrightarrow$ phương trình ẩn t sau $3(2m + 1)t + 1 = 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Cách 3 :

$d_m // (P) \Leftrightarrow$ hệ phương trình ẩn x, y, z sau :

$$(H) \begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ (2m + 1)x + (1 - m)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m + 1)z + 4m + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{vô nghiệm}$$

Từ 2 phương trình đầu của hệ phương trình trên suy ra :

$$\begin{cases} x = \frac{m - 1}{3} \\ y = \frac{2m + 4}{3} \end{cases}$$

Thế x, y tìm được vào phương trình thứ ba ta có :

$$(2m + 1)z = -\frac{1}{3}(m^2 + 11m + 6)$$

$$\text{Hệ (H) vô nghiệm} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

6 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Trên cạnh AD lấy điểm M thay đổi. Đặt góc $\widehat{ACM} = \alpha$. Hạ $SN \perp CM$.

1. Chứng minh N luôn thuộc một đường tròn cố định và tính thể tích tứ diện SACN theo a và α .

2. Hạ $AH \perp SC$, $AK \perp SN$. Chứng minh rằng $SC \perp (AHK)$ và tính độ dài đoạn HK

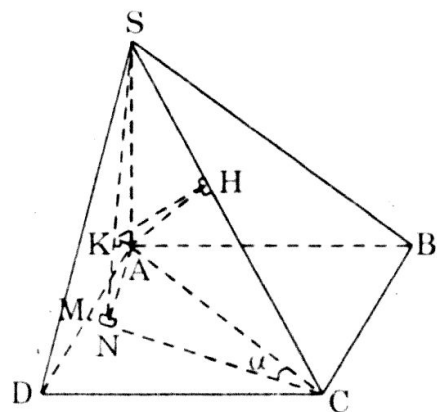
(ĐH Quốc Gia TP. HCM – khối A)

Giải

$$1. SN \perp CM \Rightarrow AN \perp CM \Rightarrow \widehat{ANC} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ N thuộc đường tròn đường kính AC trong mặt phẳng ABCD.

$$\begin{aligned} V &= V_{SACN} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ACN} \\ &= \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} CN \cdot AN \\ &= \frac{1}{3} a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} a\sqrt{2} \sin \alpha \cdot a\sqrt{2} \cos \alpha \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} a^3 \sin 2\alpha. \end{aligned}$$



$$2. \text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} AK \perp SN \\ AK \perp CN \end{array} \right\} \Rightarrow AK \perp SC$$

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} SC \perp AK \\ SC \perp AH \end{array} \right\} \Rightarrow SC \perp (AHK)$$

$$\text{Ta có: } \triangle SHK \sim \triangle SNC \Rightarrow \frac{HK}{NC} = \frac{SH}{SN} \Rightarrow HK = \frac{SH \cdot NC}{SN}$$

$$SN^2 = SA^2 + AN^2 = 2a^2 + 2a^2 \sin^2 \alpha$$

$$SN = \sqrt{2a^2(1 + \sin^2 \alpha)} = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{SA^2}{SC} = \frac{2a^2}{2a} = a$$

$$\text{Vậy: } HK = \frac{a \cdot a\sqrt{2} \cos \alpha}{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}} = \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}$$

7 Trong không gian với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng :

$$(\Delta): \frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{1}$$

Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(2,1,-1)$ trên đường thẳng (Δ) .

(ĐH Quốc Gia TP. HCM – khối B)

Giải

$$(\Delta): \frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{1}$$

$$\text{Phương trình tham số của } (\Delta): \begin{cases} x = -3 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = 6 + t \end{cases}$$

$$\text{Đặt: } \text{ch}_A A = H(-3 - 3t, 1 + t, 6 + t)$$

$$\overrightarrow{AH} = (-3t - 5, t, t + 7)$$

$$\vec{a}_A = (-3, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{a}_A \Rightarrow 3(3t + 5) + t + t + 7 = 0$$

$$\Rightarrow 11t + 22 = 0 \Rightarrow t = -2$$

Vậy hình chiếu vuông góc của điểm $A(2, 1, -1)$ trên đường thẳng (Δ) là $H(3, -1, 4)$.

8

Trong không gian với hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho hai điểm $S(0, 0, 1)$, $A(1, 1, 0)$. Hai điểm $M(m, 0, 0)$, $N(0, n, 0)$ thay đổi sao cho $m + n = 1$ và $m > 0, n > 0$.

1. Chứng minh rằng thể tích hình chóp S.OMAN không phụ thuộc vào m và n .
2. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SMN). Từ đó suy ra mặt phẳng (SMN) tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

(ĐH Quốc Gia TP. HCM – khối A, B)

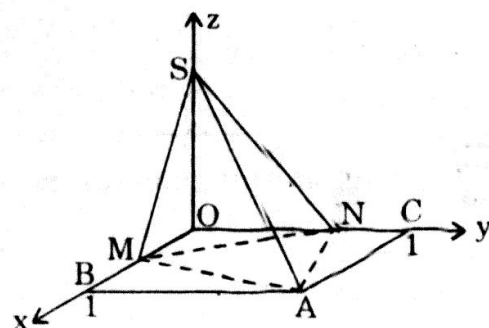
Giải

1. Đặt: $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$.

$$\text{Ta có: } S_{\text{OMAN}} = S_{\text{OABC}} - S_{\text{ACN}} - S_{\text{ABM}}$$

$$= 1 - \frac{m}{2} - \frac{n}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



$$V = V_{\text{SOMAN}} = \frac{1}{3} SO \times S_{\text{OMAN}} = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Vậy thể tích hình chóp SOMAN không phụ thuộc vào m và n .

2. Ta có : $\Delta SMN = \Delta ANM$ (c.c.c)

$$\Rightarrow d[A, (SMN)] = d[S, (AMN)] = SO = 1$$

Vậy mặt phẳng (SMN) luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm A bán kính $R = 1$.

9

Cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Trên nửa đường thẳng Ox vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông, ta lấy điểm S sao cho $\widehat{SBC} = 60^\circ$.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SD.

b) Gọi (α) là mặt phẳng chứa BC và vuông góc với mặt phẳng (SAD). Tính diện tích thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp S.ABCD.

(ĐH Kinh tế)

Giải

a) Gọi I, J là trung điểm của BC, AD; H là hình chiếu của I xuống SJ, đường thẳng qua H và song song với BC cắt SD, SA tại M, N. Gọi K là hình chiếu của M xuống BC ta có MK là đoạn vuông góc chung của BC và SD.

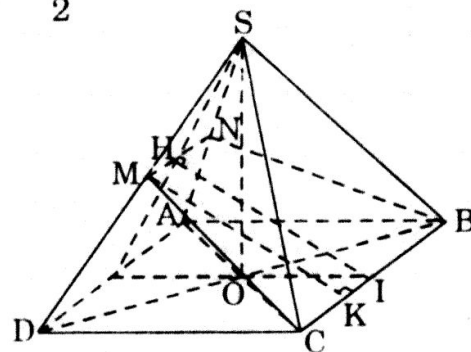
$$\text{Ta có : } MK = HI = \frac{SO \cdot IJ}{SJ}$$

$$SJ = SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$MK = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \times a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Vậy : } d[BC, SD] = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



$$\text{b) Ta có : } \left. \begin{array}{l} SJ \perp BC \\ SJ \perp IH \end{array} \right\} \Rightarrow SJ \perp (BCMN) \Rightarrow (SAD) \perp (BCMN)$$

$$SH = \sqrt{SI^2 - IH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{6a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{MN}{AD} = \frac{SH}{SJ} \Rightarrow MN = \frac{AD \cdot SH}{SJ} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{3}$$

$$S_{BC'MN} = \frac{1}{2} (BC + MN) \cdot IH = \frac{1}{2} \left(a + \frac{a}{3} \right) \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2a^2\sqrt{6}}{9}$$

10 Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho 3 đường thẳng :

$$d_1 : \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 2x - z - 6 = 0 \end{cases} ; \quad d_2 : \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1} ;$$

$$d_3 : \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{-1}$$

và mặt cầu : (S) : $x^3 + y^3 + z^3 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng d_1 , d_2 chéo nhau và viết phương trình đường thẳng d cắt d_1 , cắt d_2 và song song với d_3 .

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 sao cho giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) là đường tròn có bán kính $r = 1$.

(ĐH Kinh tế)

Giải

a) (d_1) đi qua điểm $M_1(0, -2, -6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1, 1, 2)$

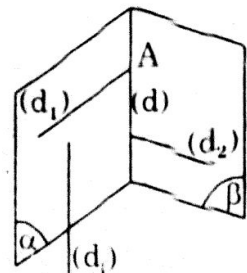
(d_2) đi qua điểm $M_2(4, 2, 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (1, 2, 1)$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (4, 4, 7)$$

$$\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b} = (-3, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{n} = -12 + 4 + 7 = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ (d_1) và (d_2) chéo nhau.



(d_3) có vectơ chỉ phương $\vec{c} = (2, -1, -1)$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d_1) và song song với (d_3) ; (α) có 2 vectơ chỉ phương là :

$$\vec{a} = (1, 1, 2) ; \quad \vec{c} = (2, -1, -1)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = (1, 5, -3)$$

$$\Rightarrow (\alpha) : 1(x - 0) + 5(y + 2) - 3(z + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 5y - 3z - 8 = 0$$

Gọi (β) là mặt phẳng chứa (d_2) và song song với (d_3) ; (β) có 2 véc tơ chỉ phương là :

$$\vec{b} = (1, 2, 1) \quad ; \quad \vec{c} = (2, -1, -1)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\beta = (1, -3, 5)$$

$$\Rightarrow (\beta) : 1(x - 4) - 3(y - 2) + 5(z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3y + 5z - 3 = 0$$

Đặt : $(d) = (\alpha) \cap (\beta)$

Do $\vec{c}$ khác phương với $\vec{a}, \vec{b}$ nên (d) là đường thẳng cần tìm.

Vậy phương trình của (d) là :

$$(d) : \begin{cases} x + 5y - 3z - 8 = 0 & (\alpha) \\ x - 3y + 5z - 3 = 0 & (\beta) \end{cases}$$

b) (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0$

(S) : có tâm là $I(-1, 1, -1)$ và bán kính là $R = \sqrt{1+1+1+1} = 2$

$$d(I, P) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

Mặt phẳng (P) chứa (d_1) nên thuộc chùm có dạng :

$$m(x - y - 2) + n(2x - z - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 2n)x - my - nz - (2m + 6n) = 0$$

$$\text{Ta có : } d(I, P) = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \frac{4m + 7n}{\sqrt{(m + 2n)^2 + m^2 + n^2}} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 22mn + 17n^2 = 0$$

$$\text{Cho } n = 1 \text{ ta được : } m = -1 \quad \text{hay} \quad m = -\frac{17}{5}$$

Suy ra có hai mặt phẳng (P) thỏa đề bài :

$$(P_1) : x + y - z - 4 = 0$$

$$(P_2) : 7x - 17y + 5z - 4 = 0$$

11 Cho hai đường thẳng : (d) : $\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases}$ và (d') : $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

- a) Chứng minh rằng hai đường thẳng (d) và (d') chéo nhau.
 b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d) và (d').
 c) Hai điểm A, B khác nhau và cố định trên đường thẳng (d) sao cho $AB = \sqrt{117}$. Khi C di động trên đường thẳng (d'), tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác ABC.

(ĐH Nông lâm TP. HCM)

Giải

$$(d) : \begin{cases} x = 2 + 3t' \\ y = -2t' \\ z = 4 + 2t' \end{cases} \quad (d') : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

a) (d) qua A(2, 0, 4) và có véc tơ chỉ phương $\vec{a} = (3, -2, 2)$

(d') qua B(1, 2, -1) và có véc tơ chỉ phương $\vec{b} = (3, 1, 2)$

$$\vec{AB} = (-1, 2, -5)$$

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (-6, 0, 9)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = -39 \neq 0$$

Vậy (d) và (d') chéo nhau.

$$b) d[(d), (d')] = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AB}|}{|\vec{n}|} = \frac{39}{\sqrt{36 + 81}} = \sqrt{13}.$$

c) Đặt : $C' = \text{ch}_d C$

$$S = S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CC'$$

$$S \text{ đạt GTNN} \Leftrightarrow CC' \text{ đạt GTNN}$$

$$\Leftrightarrow CC' \text{ là đoạn vuông góc chung của (d) và (d').}$$

$$\Leftrightarrow CC' = \sqrt{13}$$

$$\text{Vậy GTNN của } S = \frac{1}{2} \sqrt{117} \cdot \sqrt{13} = \frac{39}{2} \text{ (đvdt).}$$

12

Trong không gian với hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz, cho điểm $A(1, 2, -1)$, đường thẳng (D) có phương trình : $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng (P) có phương trình : $2x + y - z + 1 = 0$.

1. Tìm điểm B đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P).
2. Viết phương trình đường thẳng đi qua A, cắt đường thẳng (D) và song song mặt phẳng (P).

(ĐH Kiến trúc TP. HCM)

Giải

$$A(1, 2, -1)$$

$$(d) : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}$$

$$(P) : 2x + y - z + 1 = 0$$

1. Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) tại điểm H. Ta có :

$$\vec{a}_{\Delta} = \vec{n}_P = (2, 1, -1).$$

$$\text{Phương trình tham số của } (\Delta) \text{ là : } (\Delta) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } H(1 + 2t, 2 + t, -1 - t) \in (P)$$

$$\Rightarrow 2(1 + 2t) + (2 + t) - (-1 - t) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 6t + 6 = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$\text{Suy ra : } H(-1, 1, 0)$$

$$\text{Ta có : } \vec{AB} = 2\vec{AH}, \text{ suy ra : } B(-3, 0, 1).$$

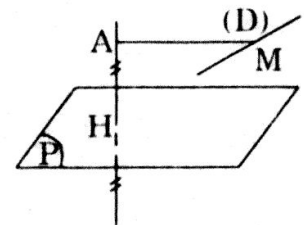
2. Xét điểm $M(2 + t, 3t, -2 + 2t) \in (D)$

$$\text{Ta có : } \vec{AM} = (1 + t, 3t - 2, 2t - 1)$$

$$AM \parallel (P) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n}_P = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + t) + (3t - 2) - (2t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$$



Vậy : $\vec{AM} = \left(\frac{2}{3}, -3, -\frac{5}{3} \right)$

Gọi (l) là đường thẳng đi qua A và song song với (P) ta có :

$$\vec{a_l} = (2, -9, -5).$$

Vậy phương trình (l) là : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-9} = \frac{z+1}{-5}$.

13 Trong không gian với hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz cho các điểm A(1, 1, 3), B(-1, 3, 2) và C(-1, 2, 3).

1. Kiểm chứng A, B, C không thẳng hàng và viết phương trình mặt phẳng (P) chứa 3 điểm này. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) .

2. Tính diện tích tam giác ABC và thể tích tứ diện OABC.

(EH Cần Thơ)

Giải

$$A(1, 1, 3); \quad B(-1, 3, 2); \quad C(-1, 2, 3)$$

1. $\vec{AB} = (-2, 2, -1); \quad \vec{AC} = (-2, 1, 0)$

$$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = (1, 2, 2)$$

$\vec{n} \neq \vec{0}$; vậy A, B, C không thẳng hàng.

Phương trình mặt phẳng (P) chứa A, B, C :

$$1(x-1) + 2(y-1) + 2(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y + 2z - 9 = 0$$

$$d(O, P) = \frac{9}{\sqrt{1+4+4}} = 3.$$

2. $S = S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{n}| = \frac{3}{2} (\text{dvdt})$

$$\vec{AO} = (-1, -1, -3)$$

$$V = V_{OABC} = \frac{1}{6} |\vec{AO} \cdot \vec{n}| = \frac{1}{6} |-1, -2, -6| = \frac{3}{2} (\text{dvtt}).$$

- 14** Cho tứ diện SABC có $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A, các điểm M thuộc SA và N thuộc BC sao cho $AM = CN = t$ ($0 < t < 2a$).

- a) Tính độ dài đoạn thẳng MN.
b) Tìm giá trị của t để đoạn MN ngắn nhất.
c) Khi đoạn thẳng MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

(DH Đà Nẵng – khối B)

Giải

- a) Dựng $MH \perp AC$ tại H

Ta có: $MH \parallel SC$ nên tam giác MHN vuông.

$$MN^2 = MH^2 + HN^2$$

$$MH = \frac{t\sqrt{2}}{2} = AH$$

$$HN^2 = CH^2 + CN^2 - 2CH \cdot CN \cos 45^\circ.$$

$$= \left(a\sqrt{2} - \frac{t\sqrt{2}}{2} \right)^2 + t^2 - 2 \left(a\sqrt{2} - \frac{t\sqrt{2}}{2} \right) t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 2a^2 + \frac{t^2}{2} - 2at + t^2 - 2at + t^2 = \frac{5t^2}{2} - 4at + 2a^2$$

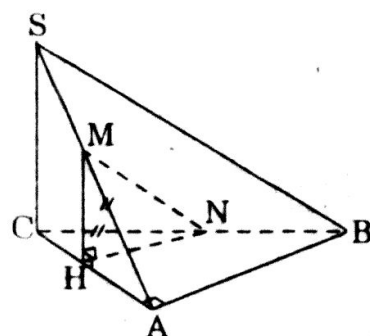
$$MN^2 = \frac{t^2}{2} + \frac{5t^2}{2} - 4at + 2a^2 = 3t^2 - 4at + 2a^2.$$

- b) Đặt: $f(t) = 3t^2 - 4at + 2a^2$

$$f'(t) = 6t - 4a; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2a}{3}.$$

t	0	$\frac{2a}{3}$	2a
f'	-	0	+
f	↘ ↗		

Vậy MN ngắn nhất khi $t = \frac{2a}{3}$.



- c) Dựng hình lập phương $CABD.SA'B'D'$. Gọi I là trung điểm AC ; IA' cắt SA tại M_0 ; ID cắt BC tại N_0 , ta có :

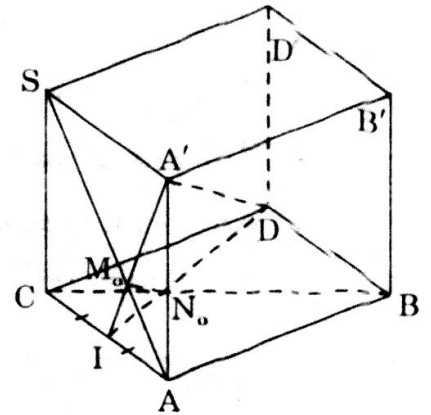
$$\frac{IM_0}{IA'} = \frac{1}{3} = \frac{IN_0}{ID} \Rightarrow M_0N_0 \parallel A'D$$

Mà $A'D \perp SA$ và $A'D \perp BC$

$\Rightarrow M_0N_0$ là đoạn vuông góc chung của SA và BC .

$$AM_0 = \frac{AS}{3} = \frac{2a}{3}$$

$$CN_0 = \frac{CB}{3} = \frac{2a}{3}$$



Vậy khi $t = \frac{2a}{3}$, MN là đoạn vuông góc chung của SA và BC .

15 Cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y - 3z + 14 = 0$ và điểm $M(1; -1; 1)$.

- Viết phương trình mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (P) .
- Hãy tìm tọa độ hình chiếu H của điểm M trên (P) .
- Hãy tìm tọa độ điểm N đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (P) .

(ĐH Đà Nẵng - khối A - đợt 2)

Giải

$$(P) : x - 2y - 3z + 14 = 0$$

$$M(1, -1, 1)$$

- Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua M và song song với mặt phẳng (P) .

$$(Q) : x - 2y - 3z + D = 0$$

$$M \in (Q) \Leftrightarrow 1 + 2 - 3 + D = 0 \Leftrightarrow D = 0$$

$$(Q) : x - 2y - 3z = 0.$$

- Tìm tọa độ hình chiếu H của M trên (P) .

Gọi (d) là đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) . Ta có :

$$\vec{n}_d = \vec{n}_P = (1, -2, -3)$$

$$\text{Phương trình tham số của } (d) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

Ta có : $H(1+t, 1-2t, 1-3t) \in (P)$

$$H \in (P) \Rightarrow (1+t) - 2(1-2t) - 3(1-3t) + 14 = 0$$

$$\Rightarrow 14t + 14 = 0 \Rightarrow t = -1$$

Vậy : $H(0, 1, 4)$

c) N là điểm đối xứng của M qua (P) $\Leftrightarrow \vec{MN} = 2\vec{MH}$

$$\Rightarrow N(-1, 3, 7).$$

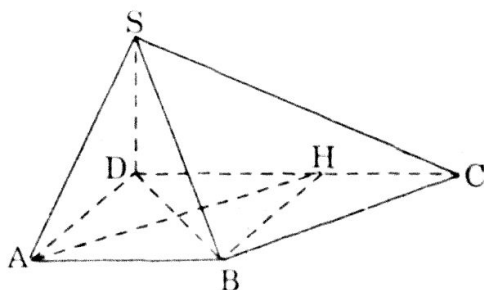
16 Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy là hình thang ABCD vuông tại A và D, $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Cạnh bên SD vuông góc với mặt phẳng (ABCD), $SD = a$

1. Chứng minh rằng tam giác SBC vuông. Tính diện tích tam giác ABC.

2. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

(ĐH Quốc gia TP. HCM – đợt 1)

Giải



1. Hạ $BH \perp DC \Rightarrow ABHD$ là hình vuông

$$\Rightarrow DH = HC = a \Rightarrow DB \perp BC$$

$$\text{Ta có : } \left. \begin{array}{l} BC \perp DB \\ BC \perp SD \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp SB$$

Vậy tam giác SBC vuông tại B.

$$S_{SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

2. Gọi I là tâm của hình vuông ABHD

$$\text{Ta có : } AI \parallel BC \Rightarrow AI \parallel (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = d(I, (SBC))$$

$$DB = 2IB \Rightarrow d(I, (SBC)) = \frac{1}{2} d(D, (SBC))$$

Ta có : $V_{SDBC} = \frac{1}{3} SD \cdot S_{DBC} = \frac{1}{3} SD \cdot \frac{1}{2} DB \cdot BC = \frac{1}{6} a \cdot a \sqrt{2} \cdot a \sqrt{2} = \frac{a^3}{3}$

Mặt khác :

$$V_{SDBC} = \frac{1}{3} d(D, SBC) \cdot S_{SBC}$$

$$\Rightarrow d(D, SBC) = \frac{3V_{SDBC}}{S_{SBC}} = \frac{a^3}{\frac{a^2 \sqrt{6}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy : $d(A, SBC) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

17 Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho điểm $I(1, 1, 1)$ và đường

thẳng (D) có phương trình : (D) : $\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0 \\ 2y + z + 5 = 0 \end{cases}$

1. Xác định tọa độ hình chiếu vuông góc H của I lên đường thẳng (D).
2. Viết phương trình mặt cầu (C) có tâm I và cắt đường thẳng (D) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 16$.

(ĐH Quốc gia TP. HCM – đợt 1)

Giải

$I(1, 1, 1); \quad d : \begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0 \\ 2y + z + 5 = 0 \end{cases}$

1. Phương trình tham số của (d) : $\begin{cases} x = 14 + 4t \\ y = t \\ z = -5 - 2t \end{cases}$

$H(14 + 4t, t, -5 - 2t) \in d$

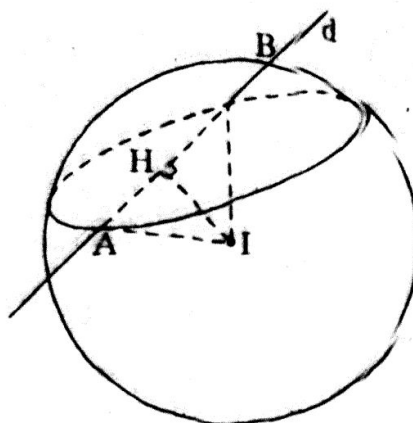
$\vec{IH} = (13 + 4t, t - 1, -6 - 2t)$

$\vec{a}_d = (4, 1, -2)$

$\vec{IH} \perp \vec{a}_d \Leftrightarrow 4(13 + 4t) + (t - 1) - 2(-6 - 2t) = 0$

$\Leftrightarrow t = -3$

Vậy : $H(2, -3, 1)$.



2. $R^2 = IA^2 = IH^2 + AH^2 = 17 + 64 = 81$

Vậy phương trình mặt cầu $S(I, R)$ là :

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 81.$$

18 Cho tam giác ABC cạnh a. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm M. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, K là trực tâm của tam giác BCM.

1. Chứng minh rằng $MC \perp (BHK)$ và $HK \perp (BCM)$.
2. Khi M thay đổi trên d, tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện KABC.

(ĐH Quốc gia TP. HCM – đợt 2)

Giải

1. Ta có : $MC \perp BK$ (1)

$AC \perp BH \Rightarrow MC \perp BH$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow MC \perp (BHK)$

Tương tự : $MB \perp (CHK)$

Ta có : $MC \perp (BHK) \Rightarrow HK \perp MC$ (3)

$MB \perp (CHK) \Rightarrow HK \perp MB$ (4)

(3) và (4) $\Rightarrow HK \perp (BCM)$

2. Gọi L là hình chiếu của K trên mặt phẳng (ABC). Ta có $L \in HI$.

Ta lại có $\widehat{HKI} = 90^\circ$ nên K lưu động trên đường tròn đường kính HI trong mặt phẳng (I, d)

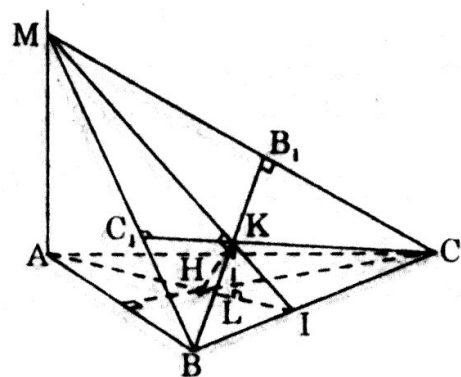
$$V_{KABC} = \frac{1}{3} KL \times S_{ABC}.$$

$$V_{KABC} \text{ đạt GTLN} \Leftrightarrow KL \text{ đạt GTLN}$$

$$\Leftrightarrow KL = \frac{HI}{2}$$

$$\Leftrightarrow KL = \frac{a\sqrt{3}}{12}$$

$$V_{\max} = \frac{1}{3} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{a\sqrt{3}}{12} = \frac{a^3}{48}.$$



- 19** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ đáy là hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a , mặt bên tạo với mặt đáy hình chóp 1 góc 60° . Mặt phẳng (P) chứa cạnh AB và cắt SC , SD lần lượt tại M và N . Cho biết góc tạo bởi mặt phẳng (P) và đáy hình chóp là 30° .

1. Tứ giác $ABMN$ là hình gì? Tính diện tích tứ giác $ABMN$ theo a .
2. Tính thể tích hình chóp $S.ABMN$ theo a .

(ĐH Sư phạm TP. HCM – khối A, B)

Giải

1. a) Tứ giác $ABMN$ là hình gì?

$$AB \parallel (SCD)$$

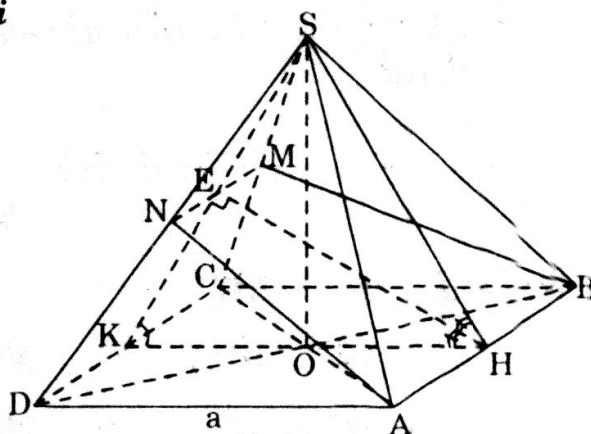
$$(P) \cap (SCD) = MN$$

$$\Rightarrow AB \parallel MN$$

$$\triangle AND = \triangle BMC$$

$$\Rightarrow AN = BM$$

$$\Rightarrow ABMN \text{ là hình thang cân.}$$



b)
$$S_{ABMN} = \frac{1}{2} (AB + MN) \cdot EH = \frac{1}{2} \left(a + \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}.$$

2.
$$V_{S.ABMN} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{ABMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}.$$

- 20** Trong không gian với hệ trục tọa độ Đề các vuông góc $Oxyz$, cho các đường thẳng:

$$(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}; \quad (d_2): \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z-5=0 \end{cases}$$

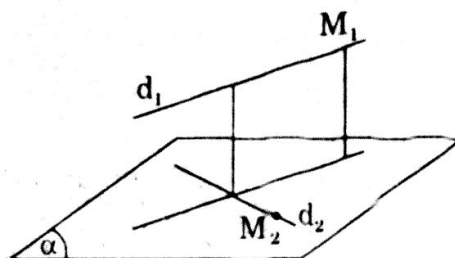
Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (D_1) , (D_2) .

(ĐH Sư phạm TP. HCM – khối A, B)

Giải

$$(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

$$(d_2): \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z-5=0 \end{cases}$$



$$M_1(1, 2, 3) \in d_1 \quad ; \quad \vec{a}_{d_1} = (1, 2, 3)$$

$$M_2(2, -1, 0) \in d_2 \quad ; \quad \vec{a}_{d_2} = (1, -1, -1)$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1 ta có :

$$(\alpha) : x + 4y - 3z + 2 = 0$$

$$\text{Ta có : } d(d_1, d_2) = d(M_1, \alpha) = \frac{|1 + 8 - 9 + 2|}{\sqrt{1 + 16 + 9}} = \frac{2}{\sqrt{26}}$$

2. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và $SA = SB = SC = SD = a$.

1. Tính diện tích toàn phần và thể tích hình chóp S.ABCD theo a.
2. Tính cosin của góc nhị diện (SAB, SAD).

(ĐH Sư phạm TP. HCM – khối D, E)

Giải

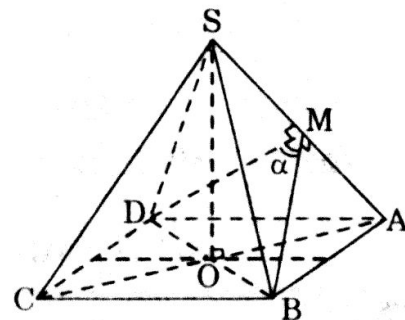
$$S_{tp} = a^2 + 4 \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{4} = a^2(\sqrt{3} + 1)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

$$h = SO = \sqrt{SA^2 - OA^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$$



2. Gọi M là trung điểm SA ta có :

$BM \perp SA$ và $DM \perp SA$

$\Rightarrow \alpha = \widehat{BMD}$ là góc phẳng nhị diện (SAB, SAD).

$$\cos \alpha = \frac{MB^2 + MD^2 - BD^2}{2MB \cdot MD} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - 2a^2}{2 \cdot \frac{3a^2}{4}} = -\frac{1}{3}$$

- 22** Trong không gian với hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho đường thẳng (D) : $\frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và điểm A(3, 2, 0). Xác định tọa độ điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng (D)

(ĐH Sư phạm TP. HCM – khóa D, E)

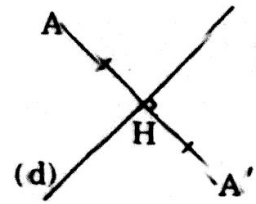
Giải

$$(d) : \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$$

$$A(3, 2, 0)$$

Phương trình tham số của (d) :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$



Xét điểm $H(-1 + t, -3 + 2t, -2 + 2t) \in (d)$.

$$\vec{AH} = (t - 4, 2t - 5, 2t - 2)$$

$$\vec{a}_d = (1, 2, 2)$$

$$\vec{AH} \perp \vec{a}_d \Leftrightarrow (t - 4) + 2(2t - 5) + 2(2t - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9t - 18 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Vậy : $H(1, 1, 2)$

$$\vec{AA'} = 2\vec{AH} \Rightarrow A'(-1, 0, 4).$$

- 23** Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, đường cao SO = h.

1. Tính theo a và h bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
2. Tính theo a và h diện tích toàn phần của hình chóp, từ đó tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.

(Học viện Ngân hàng – Phân viện TP. HCM)

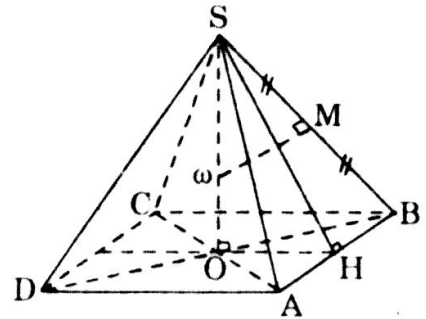
Giải

1. Trong tam giác SBO, đường trung trực của SB cắt SO tại CO là tâm hình cầu ngoại tiếp chóp SABCD.

Ta có : $SCO.SO = SB.SM$

$$\Rightarrow R = SCO = \frac{SB^2}{2SO} = \frac{h^2 + \frac{a^2}{2}}{2h}$$

$$R = \frac{2h^2 + a^2}{4h}$$



2. Gọi H là trung điểm AB ta có :

$$d = SH = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4h^2 + a^2}}{2}$$

$$S_{tp} = a^2 + 4 \cdot \frac{a.d}{2} = a^2 + a\sqrt{4h^2 + a^2}$$

Ta lại có : $V = \frac{1}{3} S_{tp}.h = \frac{1}{3} a^2.h$

$$r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{a^2.h}{a^2 + a\sqrt{4h^2 + a^2}} = \frac{ah}{a + \sqrt{4h^2 + a^2}}$$

21 Cho tứ diện ABCD.

1. Chứng minh rằng các đường thẳng nối mỗi đỉnh của tứ diện với trọng tâm của mặt đối diện đồng quy tại một điểm. Gọi điểm đó là G.
2. Chứng minh rằng hình chóp đỉnh G với đáy là các mặt của tứ diện ABCD có thể tích bằng nhau.

(ĐH Y dược TP. HCM)

Giải

• Gọi M là trung điểm của CD.

A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các mặt :
(BCD), (ACD), (ABD), (ABC).

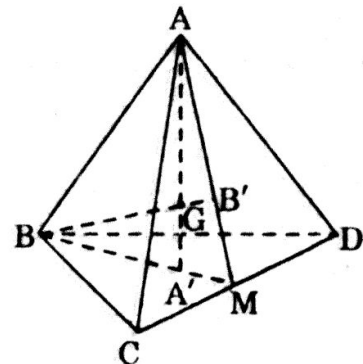
Trong tam giác ABM, AA' cắt BB' tại G

Theo Talet ta có : $GA' = \frac{1}{4} AA'$

Vậy BB' cắt AA' tại G.

Tương tự CC', DD' cũng cắt AA' tại G.

Vậy AA', BB', CC', DD' đồng quy tại G.



2. Ta có : $GA' = \frac{1}{4}AA' \Rightarrow d(G, BCD) = \frac{1}{4}d(A, BCD)$

$$\Rightarrow V_{GBCD} = \frac{1}{4}V_{ABCD}$$

Tương tự : $V_{GABC} = V_{GABD} = V_{GACD} = \frac{1}{4}V_{ABCD}$.

25 Trong không gian cho đường thẳng (D_m) có phương trình :

$$\begin{cases} x - my + z - m = 0 \\ mx + y - mz - 1 = 0 \end{cases}$$

- Viết phương trình hình chiếu (Δ_m) của (D_m) lên mặt phẳng Oxy.
- Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng (Δ_m) luôn tiếp xúc với một đường tròn trong mặt phẳng Oxy.

(ĐH Y dược TP. HCM)

Giải

$$(d_m) : \begin{cases} x - my + z - m = 0 \\ mx + y - mz - 1 = 0 \end{cases}$$

- Phương trình mặt phẳng $(xOy) : z = 0$

Phương trình mặt phẳng (α) chứa (d_m) và vuông góc với $(xOy) :$

$$2mx + (1 - m^2)y - m^2 - 1 = 0$$

$$(\Delta_m) = (\alpha) \cap (xOy)$$

$$\Rightarrow (\Delta_m) : \begin{cases} 2mx + (1 - m^2)y - m^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- Trong mặt phẳng tọa độ (xOy) phương trình của (Δ_m) là :

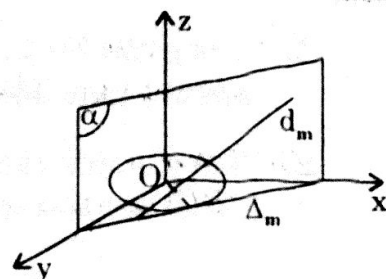
$$(\Delta_m) : 2mx + (1 - m^2)y - m^2 - 1 = 0$$

Xét đường tròn cố định tâm $I(a, b)$ bán kính R trong mặt phẳng (xOy) .

$$(\Delta_m) \text{ tiếp xúc với } C(I, R) \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow d(I, \Delta_m) = R, \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2ma + (1 - m^2)b - m^2 - 1|}{\sqrt{4m^2 + (1 - m^2)^2}} = R, \quad \forall m$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m}{m^2+1}a + \frac{1-m^2}{m^2+1}b - 1 = R, \\ m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ R = 1 \end{cases}$$

Vậy (Δ_m) luôn tiếp xúc với đường tròn cố định $C(0, 1)$ trong mặt phẳng (xOy) .

26 Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh a . Lấy trên BB' và CC' các đoạn $BM = x$ và $CN = y$.

a) Chứng minh rằng tam giác AMN chỉ có thể vuông ở M hay N .

Tìm hệ thức giữa x và y để tam giác AMN vuông ở M .

b) Chứng minh rằng nếu $x = 2y$, thì mặt phẳng (AMN) luôn đi qua một đường thẳng cố định.

c) Gọi I là trung điểm của đoạn AA' và α là góc của hai mặt phẳng (BIC') và (ABC) . Tính cạnh bên AA' theo a và α .

(Trung tâm Đào tạo Bồi dưỡng Cán bộ Y tế)

Giai

a) $\widehat{MAN} = 90^\circ \Leftrightarrow AM^2 + AN^2 = MN^2$

$$\Leftrightarrow a^2 + x^2 + a^2 + y^2 = a^2 + (x - y)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = -2xy. \text{ Vô lí.}$$

$\widehat{AMN} = 90^\circ \Leftrightarrow MA^2 + MN^2 = AN^2$

$$\Leftrightarrow a^2 + x^2 + a^2 + (x - y)^2 = a^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2xy + a^2 = 0$$

b) $x = 2y \Rightarrow BM = 2CN$

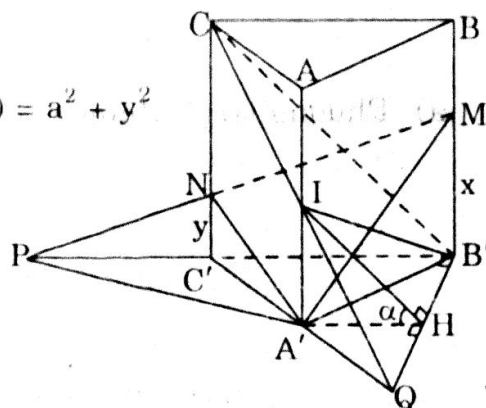
MN cắt BC tại P

Ta có : $BP = 2PC \Rightarrow P$ cố định

$\Rightarrow$ Mặt phẳng AMN đi qua đường thẳng cố định AP

c) CI cắt $C'A'$ tại Q .

Ta có : $CC' = 2AI$, do đó : $CQ = 2CA$



Do $AB = AC = AQ = a$ nên $QB \perp CB$

Dựng $AH \perp BQ$, ta có : $IH \perp BQ$

Suy ra : $\widehat{IHA} = \alpha$

Ta có : $AH \parallel BC$ do đó $AH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$

$$AA' = 2AI = 2.AH.tg\alpha = atg\alpha$$

Vậy : $AA' = atg\alpha$.

- 27** Trong không gian với hệ tọa độ trục chuẩn Oxyz, cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (α) có phương trình như sau :

$$(d) : \begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} ; \quad (\alpha) = y - z - 1 = 0$$

- Tìm tọa độ giao điểm A của (d) và (α).
- Tính góc nhọn (hay vuông) tạo bởi (d) và (α).
- Viết phương trình đường thẳng (a) đi qua điểm A nằm trong mặt phẳng (α) và tạo với (d) một góc là $\frac{\pi}{6}$.

(Trung tâm Đào tạo Bồi dưỡng Cán bộ Y tế)

Giải

$$(d) : \begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} ; \quad (\alpha) : y - z - 1 = 0$$

a) Phương trình tham số của (d) :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 4 - t \end{cases}$$

$$\vec{a}_d = (1, 0, -1) ; \quad \vec{n}_\alpha = (0, 1, -1)$$

$$\sin(d, \alpha) = \cos(\vec{a}_d, \vec{n}_\alpha) = \frac{|\vec{a}_d \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{a}_d| \cdot |\vec{n}_\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (d, \alpha) = \frac{\pi}{6}$$

b) $A(t, 2, 4 - t) \in d$

$$A \in (\alpha) \Leftrightarrow 2 - (4 - t) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

Vậy : $A(3, 2, 1)$.

c) Do ta đã có : $(d, \alpha) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow (a) \text{ ch}_a d$

Gọi (β) là mặt phẳng chứa (d) và cắt (α)

(β) có cặp vectơ chỉ phương là :

$$\vec{a}_d = (1, 0, -1)$$

$$\vec{n}_\alpha = (0, 1, -1)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\beta = (1, 1, 1)$$

$$\Rightarrow (\beta) : x + y + z + D = 0$$

$$A \in (\beta) \Leftrightarrow 3 + 2 + 1 + D = 0 \Leftrightarrow D = -6$$

$$\Rightarrow (\beta) : x + y + z - 6 = 0$$

$$a = (\alpha) \cap (\beta)$$

Vậy phương trình của (a) là :
$$\begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x + y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

28 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ với cạnh bằng a . Giả sử M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'D', D'C', C'C, A'A$.

1. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một mặt phẳng. Tính chu vi của tứ giác $MNPQ$ theo a .

2. Tính diện tích của tứ giác $MNPQ$ theo a .

(Học viện Quan hệ Quốc tế)

Giải

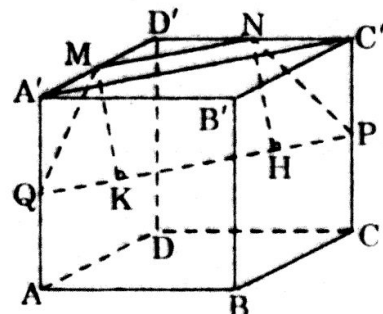
1. Ta có : $MN \parallel A'C'$

$$PQ \parallel A'C' \Rightarrow MN \parallel PQ$$

$$\Rightarrow MNPQ \text{ đồng phẳng}$$

$$\text{Chu vi } MNPQ = PQ + MQ + MN + NP$$

$$= a\sqrt{2} + 3 \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$$



2. Gọi K và H là hình chiếu của M và N xuống PQ ta có :

$$QK = PH = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow MK = \sqrt{MQ^2 - QK^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} - \frac{2a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$\begin{aligned} S_{MNPQ} &= \frac{1}{2}(PQ + MN).MK \\ &= \frac{1}{2} \left(a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{12}}{16} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

MỤC LỤC

Lời nói đầu	3
Chương 1. ĐẠI SỐ VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN	5
Chương 2. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	18
Chương 3. MẶT PHẪNG	34
Chương 4. ĐƯỜNG THẲNG	52
Chương 5. MẶT CẦU VÀ MẶT TRỤ	84
Chương 6. ĐỀ TOÁN LUYỆN THI	94
Chương 7. ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC	129

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312; (04) 9724770. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:

***Giám đốc:* PHÙNG QUỐC BẢO**
***Tổng biên tập:* NGUYỄN BÁ THÀNH**

***Biên tập:* HẢI DĂNG**
***Sửa bài:* PHẠM THỊ CẨM TIÊU**
***Trình bày bìa:* NGỌC ANH**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN HÌNH GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Mã số: 1L – 134ĐH2006

In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24 tại xưởng in Chi nhánh Công Ty Phát Triển Công Nghệ và Truyền Hình.

Số xuất bản: 754-2006/CXB/11-143/ĐHQGHN ngày 2/10/2006. Quyết định xuất bản số: 345LK/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2006.